

Géométrie métrique

Edition 2007-2008 / DELM

§ 2 Produit scalaire

■ Liens hypertextes

Exercices correspondants de niveau standard:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Exercices_standard.pdf

Cours de niveau avancé:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Cours_avance.pdf

Exercices de niveau avancé:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Exercices_avance.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):

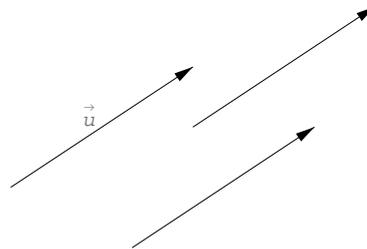
<http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html>

§ 2.1 Norme d'un vecteur, vecteur unitaire

■ Norme d'un vecteur

Nous avons étudié, en première année, que l'on peut représenter un vecteur par des flèches. Celles-ci représentent le même vecteur si elles ont

- la même direction,
- le même sens et
- la même longueur.



Le vecteur $\vec{0}$ est représenté par un point.

Définition: la longueur du vecteur \vec{u} est appelée norme de \vec{u} et est notée $\|\vec{u}\|$.

■ Propriétés de la norme

Pour tous les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et pour tous les nombres réels k , on a

$$\|\vec{u}\| \geq 0$$

$$\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

$$\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$$

$$|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

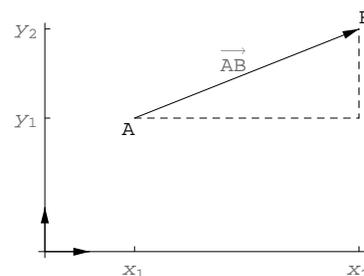
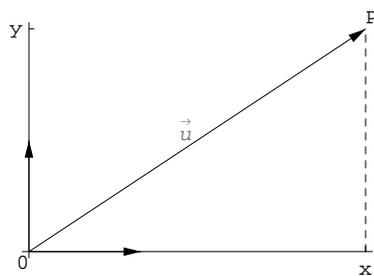
Cette propriété est appelée inégalité triangulaire car pour tout triangle (éventuellement dégénéré), la longueur d'un côté est supérieure ou égale à la différence des longueurs des deux autres côtés mais inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. Le lecteur est invité à illustrer cette propriété.

■ Expression de la norme dans un repère orthonormé

Par rapport à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne les points $P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemple: La distance entre les points $A(-2; 3)$ et $B(4; -5)$ est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -5 - 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

Remarque: Attention

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \quad \text{mais}$$

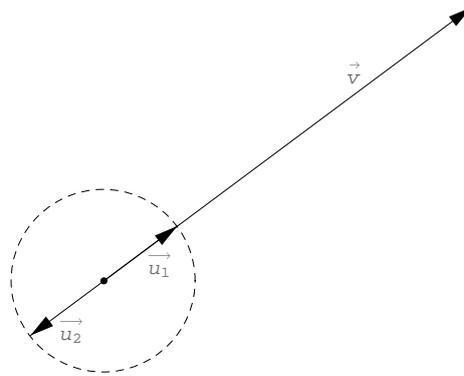
$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

■ Vecteur unitaire

Définition: un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.

Exemple: le vecteur $\begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}$ est unitaire car $\sqrt{0.8^2 + (-0.6)^2} = 1$.

Proposition: un vecteur non nul \vec{v} étant donné, il existe exactement deux vecteurs \vec{u}_1, \vec{u}_2 qui sont à la fois liés à \vec{v} et unitaires.



En effet, nous cherchons des vecteurs de la forme $k \cdot \vec{v}$ qui sont unitaires

$$\|k \cdot \vec{v}\| = 1 \iff |k| \cdot \|\vec{v}\| = 1 \iff |k| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}$$

On obtient deux solutions

$$k_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \quad \text{ou} \quad k_2 = \frac{-1}{\|\vec{v}\|}$$

$$\boxed{\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{u}_2 = \frac{-1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}}$$

§ 2.2 Produit scalaire de deux vecteurs

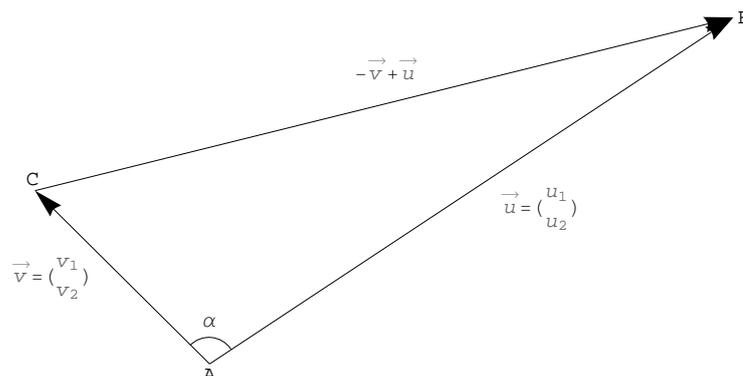
■ Rappel du théorème du cosinus

Dans le théorème du cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$, le terme $-2bc \cos(\alpha)$ représente la correction à apporter au théorème de Pythagore. Isolons la moitié de ce terme correctif:

$$\boxed{bc \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)}$$

C'est cette forme du théorème du cosinus que nous allons appliquer au triangle formé par deux vecteurs.

■ Théorème du cosinus pour deux vecteurs



Il s'agit de récrire le théorème du cosinus avec les vecteurs \vec{u} , \vec{v} :

$$\vec{AC} = \vec{v}; \quad b = \|\vec{v}\|;$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}; \quad c = \|\vec{u}\|;$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{v} + \vec{u}; \quad a = \|\vec{u} - \vec{v}\|;$$

L'angle α désigne l'angle entre les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Le théorème du cosinus devient

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$$

Le membre de droite peut s'exprimer avec les composantes des vecteurs par rapport à une base orthonormée

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) &= \frac{1}{2} \left((u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - ((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 - 2u_1v_1 - v_1^2 - u_2^2 - 2u_2v_2 - v_2^2 \right) \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) = u_1v_1 + u_2v_2}$$

■ Définitions du produit scalaire

Chacun des deux membres de l'équation précédente est dénommé produit scalaire et est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Ainsi, par rapport à une base orthonormée, en notant $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$,

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 \end{aligned}} \quad (\text{Voir Formulaires et tables})$$

Dans le cas particulier où $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on convient que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

■ Signe du produit scalaire, orthogonalité

En tenant compte des propriétés de la norme dans l'expression $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 &\iff \left(\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \cos(\alpha) > 0 \right) \\ &\iff \left(\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \alpha \text{ est } \underline{\text{aigu}} \right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 &\iff \left(\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \cos(\alpha) < 0 \right) \\ &\iff \left(\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \alpha \text{ est } \underline{\text{obtus}} \right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\iff \left(\vec{u} = \vec{0}, \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \cos(\alpha) = 0 \right) \\ &\iff \left(\vec{u} = \vec{0}, \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \alpha \text{ est } \underline{\text{droit}} \right) \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, on dit que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

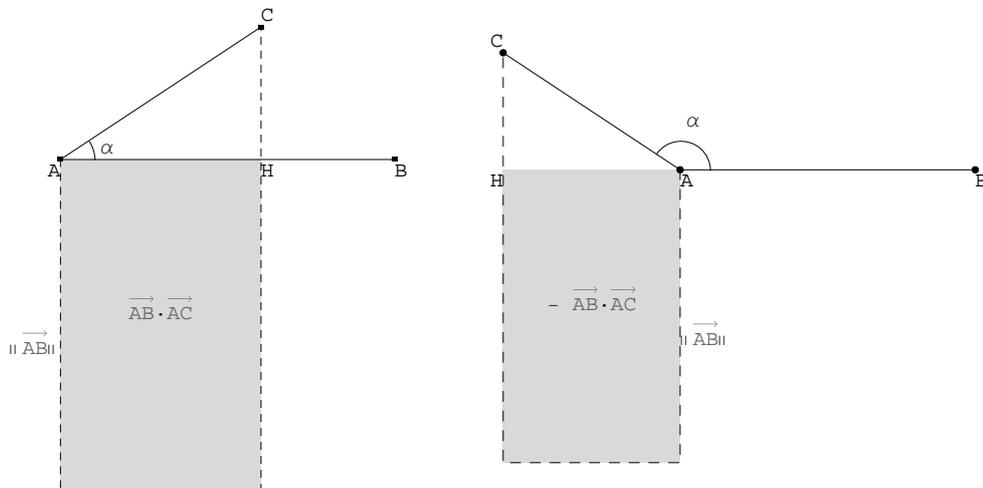
En composantes dans une base orthonormée

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \iff u_1v_1 + u_2v_2 = 0}$$

Interprétation géométrique du produit scalaire

Dans la figure suivante, H est le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur la droite AB (on dit alors que \overrightarrow{AH} est la projection orthogonale de \overrightarrow{AC} sur la direction de \overrightarrow{AB}).

Perpendiculairement à AB en A, on a reporté la longueur de AB (il s'agit plus précisément de l'image du vecteur \overrightarrow{AB} par une rotation de 90° dans le sens rétrograde autour de A).



Dans le cas où l'angle α est aigu, l'aire de la surface grisée représente le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \left(\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha) \right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Dans le cas où l'angle α est obtus, l'aire de la surface grisée est égale à l'opposé du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AH}\| &= \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \left(\|\overrightarrow{AC}\| \cos(180^\circ - \alpha) \right) = \\ \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \left(-\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha) \right) &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

■ Propriétés du produit scalaire

Pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tous les nombres réels k , on a

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (\text{distributivité})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{commutativité})$$

$$(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u}^2 = \left(\|\vec{u}\| \right)^2 \quad (\text{le carré scalaire est égal au carré de la norme})$$

Pour les démonstrations, on peut exprimer tous les vecteurs dans une base orthonormée. Par exemple, pour la commutativité, exprimons chacun des deux membres en composantes puis comparons:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2, \quad \text{ce qui établit l'égalité.}$$

Le lecteur est invité à démontrer les autres propriétés.

■ Exemple 1 (problème résolu)

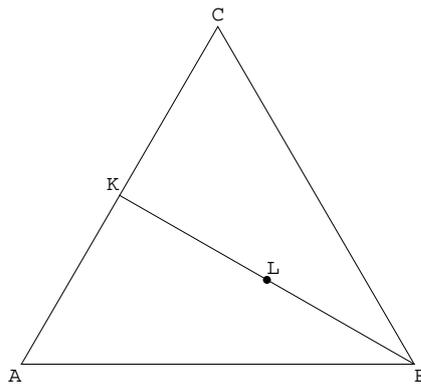
Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2; 3)$, $B(5; 1)$, $C(0; -3)$. Calculez le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-6) = 26$$

■ Exemple 2 (problème résolu)

ABC est un triangle équilatéral de 6 cm de côté; K est le milieu du segment AC; L est le milieu du segment KB.

Calculez les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BK} \cdot \vec{BC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BL}$, $\vec{CA} \cdot \vec{KB}$,



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\angle(\vec{AB}, \vec{AC})) = 6 \cdot 6 \cdot \cos(60^\circ) = 18$$

$$\vec{BK} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BK}\| \|\vec{BC}\| \cos(\angle(\vec{BK}, \vec{BC})) = \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot 6 \cdot \cos(30^\circ) = 27$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BL} = \|\vec{AB}\| \|\vec{BL}\| \cos(\angle(\vec{AB}, \vec{BL})) = 6 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(150^\circ) = -\frac{27}{2}$$

$$\vec{CA} \perp \vec{KB} \quad \text{donc} \quad \vec{CA} \cdot \vec{KB} = 0$$

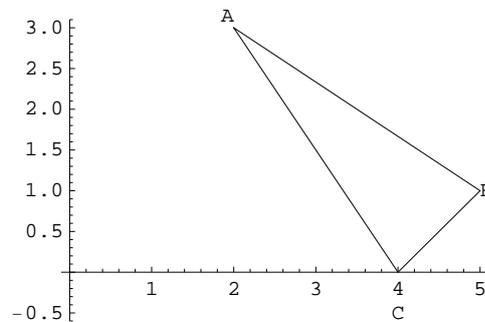
■ Angle entre deux vecteurs

De la définition du produit scalaire, on tire

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

■ Exemple 3 (problème résolu)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2; 3)$, $B(5; 1)$, $C(4; 0)$. Calculez les angles du triangle.



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|} = \frac{3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{\sqrt{13} \sqrt{13}} = \frac{12}{13}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{12}{13}\right) \approx 22.62^\circ$$

Durant le calcul précédent, on aura remarqué que le triangle est isocèle. Par suite

$$\beta = \gamma = \frac{180^\circ - \alpha}{2} \approx 78.69^\circ$$

■ Produit scalaire et théorème du cosinus

C'est en appliquant le théorème du cosinus à la géométrie vectorielle que nous avons construit le produit scalaire. Celui-ci est donc apparu comme une conséquence du théorème du cosinus. Nous montrons maintenant que la réciproque est vraie, à savoir que le théorème du cosinus peut se déduire des propriétés du produit scalaire. En effet, pour un triangle de sommets ABC, en utilisant les notations usuelles, on a

$$\begin{aligned} a^2 = \vec{BC}^2 &= (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = \vec{BA}^2 + 2 \vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 = \vec{BA}^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 \\ &= \vec{BA}^2 - 2 \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\alpha) + \vec{AC}^2 = c^2 - 2cb \cos(\alpha) + b^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ceci montre que, en calcul vectoriel, il est possible de se passer du théorème du cosinus. Il est d'usage de remplacer ce dernier par les propriétés du produit scalaire.