§ 3 Fonctions logarithmiques

Edition 2007-2008 / DELM

Liens hypertextes

Cours de niveau avancé (plus étoffé):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Logarithmes/Log-Cours_avance.pdf

Exercices correspondants (pour les niveaux standard et avancé):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Logarithmes/Log-Exercices.pdf

Quelques supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

§ 3.1 Notion de logarithme

Fonction exponentielle de base *a* (rappel)

La fonction exponentielle de base a, notée $x \mapsto a^x$, peut se définir comme suit :

1° à une suite arithmétique, on fait correspondre une suite géométrique de la manière suivante

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	…

2° pour obtenir des valeurs intermédiaires,
on insère, dans l'ensemble de départ, des moyens arithmétiques (nombres rationnels)
et, dans l'ensemble d'arrivée, les moyens géométriques correspondants.

3° on prolonge continûment pour obtenir la fonction exponentielle
$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0; \infty[, \quad x \mapsto a^x$.

Fonction logarithmique de base a (définition)

La fonction logarithmique de base a, notée $x \mapsto \log_a(x)$, peut se définir comme suit :

1° à une suite géométrique, on fait correspondre une suite arithmétique de la manière suivante

x	…	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	…
y	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

2° pour obtenir des valeurs intermédiaires,
on insère, dans l'ensemble de départ, des moyens géométriques
et, dans l'ensemble d'arrivée, les moyens arithmétiques correspondants (nombres rationnels).

3° on prolonge continûment pour obtenir la fonction logarithmique
$\log_a :]0; \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)$.

Premières propriétés du logarithme

$\mathbf{log_a (1) = 0}$
$\mathbf{log_a (a) = 1}$
$\mathbf{log_a (a^n) = n}$

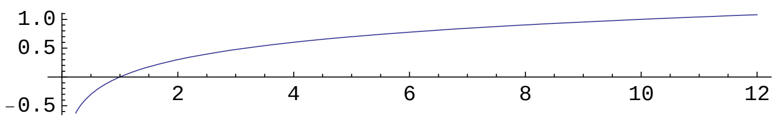
Nous verrons plus tard que cette dernière propriété est valable, non seulement pour tout $n \in \mathbb{Z}$ mais aussi pour tout $n \in \mathbb{R}$.

Logarithme décimal (ou logarithme vulgaire)

Le logarithme de base 10, noté **log**, est appelé logarithme décimal (ou logarithme vulgaire):

$$\boldsymbol{log\,(x) = \log_{10}(x)}$$

x	...	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	...
$log\,(x)$	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...



Cette fonction est programmée sur votre calculatrice. Calculez
log(0.1), log(1), log(10), log(100).

Notez la propriété

$$\mathbf{log}\left(\mathbf{10}^{n}\right) \;=\; \boldsymbol{n}$$

Aujourd'hui, le logarithme décimal est encore utilisé pour quelques définitions traditionnelles, par exemple en chimie où il sert à définir le pH d'une solution.

<u>pH d'une solution</u>

Le pH d'une solution est l'opposé du logarithme décimal de la concentration des ions H^+, cette concentration étant exprimée en mole de ions H^+par mole de solution :

pH = - log[H^+]   où [H^+] = concentration molaire de H^+.

Dire qu'une solution est de pH 7 signifie

- log[H^+] = 7
log[H^+] = -7
[H^+] = 10^{-7} c'est-à-dire qu'il y a un ion H^+ pour 10 millions de molécules de solution.

Logarithme naturel (ou logarithme népérien)

<u>Le nombre e</u>

Actuellement, pour les logarithmes, la base la plus utilisée est la base **e ≃2.718**

On peut obtenir le nombre **e** comme limite d'une série infinie

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

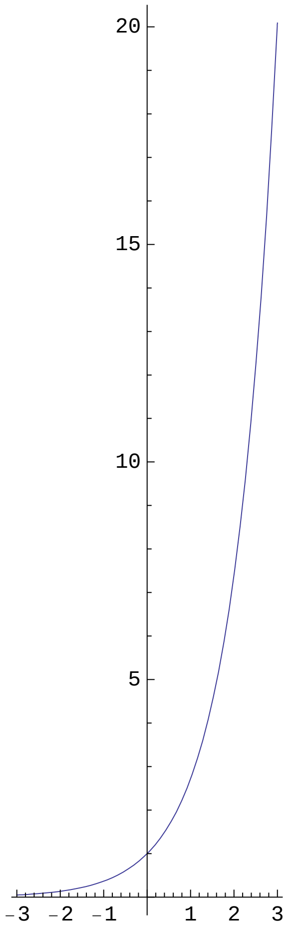
= 2.71828182845904523536028747135266249775724709370...

En mathématiques, le nombre **e** est un nombre aussi important que le nombre π.
Les raisons pour lesquelles on a choisi cette base seront expliquées plus tard (simplification dans le calcul de la dérivée des fonctions exponentielles).

<u>L'exponentielle naturelle ou exponentielle de base **e**</u>

L'exponentielle de base **e** est appelée exponentielle naturelle et est aussi notée **exp** :

$$\mathbf{exp(x)} = e^x$$



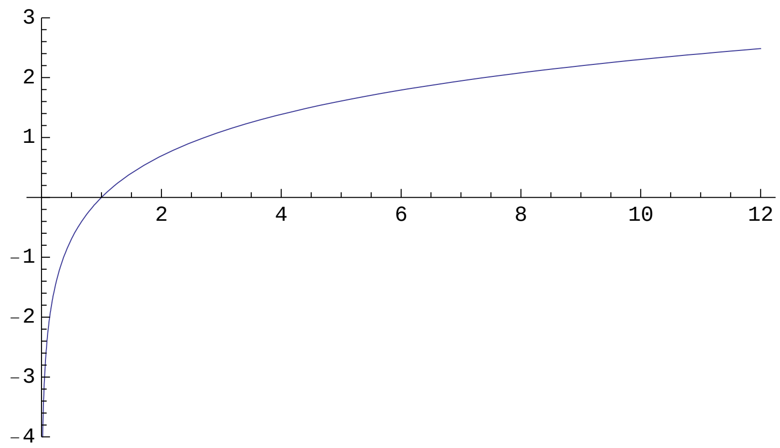
Cette fonction est programmée sur votre calculatrice. Calculez

e^1, e^2, e^{-1}.

<u>Le logarithme naturel ou logarithme de base **e**</u>

Le logarithme de base **e** est appelé <u>logarithme naturel</u> et est noté **ln**

$$\mathbf{ln(x)} = \mathbf{log}_e(x)$$



Le logarithme naturel a été introduit par le mathématicien écossais **John Napier** en 1614. C'est pourquoi il est aussi nommé logarithme népérien.

Cette fonction est programmée sur votre calculatrice. Calculez
ln(2), ln(10).

§ 3.2 Fonctions réciproques (cas particulier)

La propriété algébrique de réciprocité

Dans ce paragraphe, nous souhaitons affirmer que le "logarithme de base *a*" est la fonction réciproque de la fonction "exponentielle de base *a*".

Reprenons les tableaux donnés dans les définitions des fonctions exponentielle et logarithmique de base 10 :

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x) = 10^x$	...	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	...

x	...	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	...
$g(x) = \log(x)$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

Composons les deux fonctions. Par exemple,

$$g(f(3)) = g(1000) = 3$$
$$g(f(-2)) = g(0.01) = -2$$
$$f(g(1000)) = f(3) = 1000$$
$$f(g(0.01)) = f(-2) = 0.01$$

Cette règle s'applique aussi aux valeurs intermédiaires :

$$g(f(x)) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
$$f(g(x)) = x \qquad \text{pour tout } x \in \left]0; \infty\right[$$

Dans une telle situation, on dit que les fonctions *f* et *g* sont réciproques l'une de l'autre
et on note $g = {}^r f$.
Dans une autre notation,

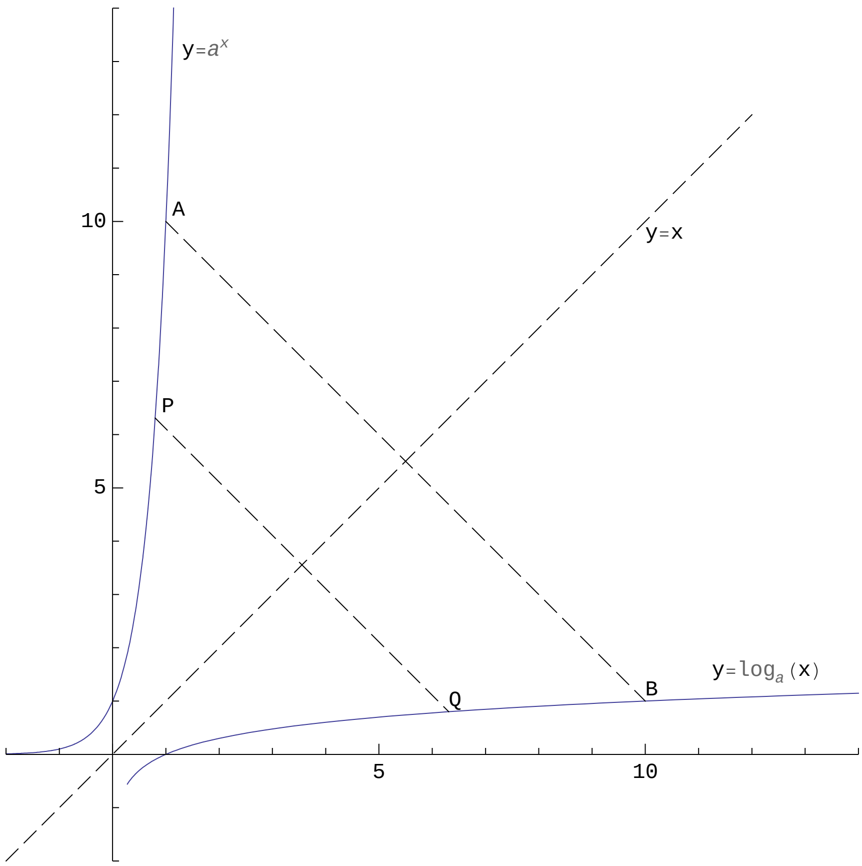
$$\log\left(10^x\right) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
$$10^{\log(x)} = x \qquad \text{pour tout } x \in \left]0; \infty\right[$$

Cette règle est valable dans toutes les bases $a \in \,]0; 1[\cup]1; \infty[$

$$\log_a(a^x) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{pour tout } x \in \,]0; \infty[$$

■ Interprétation géométrique

Puisque $f(1) = 10$ et $g(10) = 1$, la courbe de f passe par le point $A(1; 10)$ et la courbe de g passe par $B(10; 1)$.



Les points $A(1; 10)$ et $B(10; 1)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
Plus généralement, à tout point P situé sur le graphe de f correspond le point Q situé sur le graphe de g tel que les points P, Q sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
Cette propriété caractérise deux fonctions réciproques.

Plus généralement, on peut dire que
* "le logarithme de base a" est la fonction réciproque de "l'exponentielle de base a" et
* "l'exponentielle de base a" est la fonction réciproque du "logarithme de base a".

$\boxed{a^x = y \iff \log_a(y) = x}$ (voir *Formulaires et tables* p .67)

§ 3.3 [Niveau avancé] Fonctions réciproques (cas général)

§ 3.4 Propriétés des logarithmes

Propriété fondamentale du logarithme

On a par exemple
$\log_2(4\cdot 8) = \log_2\left(2^2\cdot 2^3\right) = \log_2\left(2^{2+3}\right) = 2+3 = \log_2\left(2^2\right)+\log_2\left(2^3\right) = \log_2(4)+\log_2(8)$.
Cette propriété se laisse généraliser $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x)+\log_a(y)$.

Propriétés des logarithmes (voir *Formulaires et tables* p. 14)

1° $\boldsymbol{\log_a(1) = 0}$

$\boldsymbol{\log_a(a) = 1}$

2° $\boldsymbol{\log_a(a^x) = x}$

$\boldsymbol{a^{\log_a(y)} = y}$

3° $\boldsymbol{\log_a(x\cdot y) = \log_a(x)+\log_a(y)}$

4° $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)}$

$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x)-\log_a(y)}$

5° $\boldsymbol{\log_a(x^n) = n\cdot\log_a(x)}$

§ 3.5 [Niveau avancé] Propriétés des logarithmes (démonstrations)

§ 3.6 Changements de base

Changement de base des logarithmes

On veut comparer $u = \log_a(x)$ et $v = \log_b(x)$.
On a donc $x = a^u$ et $x = b^v$ d'où $a^u = b^v$.
Prenons le logarithme des deux membres

$$\log_b(a^u) = \log_b(b^v) \Longleftrightarrow u\cdot\log_b(a) = v \Longleftrightarrow \log_a(x)\cdot\log_b(a) = \log_b(x)$$

d'où la formule de changement de base :

$$\boldsymbol{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$$

(voir *Formulaires et tables* p. 14)

En particulier

$$\boldsymbol{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

(voir *Formulaires et tables* p. 67)

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \simeq 0.434294\cdot\ln(x)$$

$$\ln(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} \simeq 2.30259\cdot\log(x)$$

Les fonctions logarithmiques de deux bases fixées sont proportionnelles.

Changement de base des exponentielles

$a^x = b^y \iff \log_b(a^x) = y \iff x \cdot \log_b(a) = y$

d'où la formule de changement de base des exponentielles

$$\mathbf{a^x = b^{x \cdot \log_b(a)}}$$

En particulier,

$$\boldsymbol{a^x = e^{x \cdot \ln(a)}}$$ (voir *Formulaires et tables* *p.* 67)

$10^x = e^{x \cdot \ln(10)} \simeq e^{2.30259 \cdot x}$

$e^x = 10^{x \cdot \log(e)} \simeq 10^{0.434294 \cdot x}$

---

§ 4 Equations exponentielles et logarithmiques

■ Un exemple d'équation exponentielle

Une certaine population croît de 0.8 % par an.
Après combien de temps la polulation aura-t-elle doublé ?

$P_n = P_0 \, (1 + i)^n$ où $i = 0.008$

$\frac{P_n}{P_0} = (1 + i)^n$

$2 = 1.008^n$

On reconnaît une équation exponentielle au fait que l'inconnue apparaît en exposant.
Pour la résoudre, après avoir vérifié que les deux membres sont positifs, on prend le logarithme des deux membres:

$\ln(2) = \ln\left(1.008^n\right) = n \cdot \ln(1.008)$ d'où $n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.008)} \simeq 86.99$ ans.

Remarquez que l'usage d'un logarithme d'une autre base conduit au même résultat :

$\log(2) = \log\left(1.008^n\right) = n \cdot \log(1.008)$ d'où $n = \frac{\log(2)}{\log(1.008)} \simeq 86.99$ ans.

■ Un exemple d'équation logarithmique

Soit à résoudre l'équation $\ln(x + 3) + \ln(x - 3) = 2$

L'idée générale consiste à appliquer la fonction exponentielle aux deux membres de l'équation:

$\exp(\ln(x + 3) + \ln(x - 3)) = \exp(2)$

Règle : $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$

$\exp(\ln(x + 3)) \cdot \exp(\ln(x - 3)) = \exp(2)$

$(x + 3)(x - 3) = e^2$

$x^2 = e^2 + 9$

$x_1 = \sqrt{e^2 + 9} \simeq 4.04834$ ou $x_2 = -\sqrt{e^2 + 9} \simeq -4.04834$

Le résultat ainsi obtenu est faux. L'expression $\ln(x_2 - 3)$ n'étant pas définie, la deuxième solution doit être éliminée.

Pour les équations logarithmiques, il est nécessaire de vérifier que les solutions obtenues appartiennent à <u>l'ensemble de</u>

<u>définition de l'équation donnée</u>. Voici comment présenter les calculs:

$$\ln(x+3) + \ln(x-3) = 2$$

<u>1-ère étape</u> : déterminer l'ensemble de définition *D* de l'équation; ici, il est caractérisé par les conditions

$$x + 3 > 0 \quad \text{et} \quad x - 3 > 0$$

$$x > -3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

$$x > 3$$

$$D =]\,3;\ \infty[$$

<u>2-ème étape</u> : effectuer les calculs proprement dits

$$\exp(\ln(x+3) + \ln(x-3)) = \exp(2)$$

$$\text{Règle} : \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

$$\exp(\ln(x+3)) \cdot \exp(\ln(x-3)) = \exp(2)$$

$$(x+3)(x-3) = e^2$$

$$x^2 = e^2 + 9$$

$$x_1 = \sqrt{e^2 + 9} \simeq 4.04834 \quad \text{ou} \quad x_2 = -\sqrt{e^2 + 9} \simeq -4.04834$$

<u>3-ème étape</u> : éliminer les solutions qui n'appartiennent pas à l'ensemble de définition

$$x_1 \in D \quad \Longrightarrow \quad x_1 \text{ est accepté;}$$
$$x_2 \notin D \quad \Longrightarrow \quad x_2 \text{ est éliminé;}$$

$$S = \{x_1\} = \left\{\sqrt{e^2 + 9}\right\}$$