§ 3 Fonctions logarithmiques

Edition 2007-2008 / DELM

Liens hypertextes

Cours de niveau standard:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Logarithmes/Log-Cours_standard.pdf

Exercices correspondants (pour les niveaux standard et avancé):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Logarithmes/Log-Exercices.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

§ 3.1 Notion de logarithme

Fonction exponentielle de base a (rappel)

La fonction exponentielle de base a, notée $x \mapsto a^x$, peut se définir comme suit :

1° à une suite arithmétique, on fait correspondre une suite géométrique de la manière suivante

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	…

2° pour obtenir des valeurs intermédiaires,
on insère, dans l'ensemble de départ, des moyens arithmétiques (nombres rationnels)
et, dans l'ensemble d'arrivée, les moyens géométriques correspondants.

3° on prolonge continûment pour obtenir la fonction exponentielle
$\mathbf{f : \mathbb{R} \longrightarrow]0; \infty[\,,\ x \mapsto a^x}$.

Fonction logarithmique de base a (définition)

La fonction logarithmique de base a, notée $x \mapsto \log_a(x)$, peut se définir comme suit :

1° à une suite géométrique, on fait correspondre une suite arithmétique de la manière suivante

x	…	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	…
y	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…

2° pour obtenir des valeurs intermédiaires,
on insère, dans l'ensemble de départ, des moyens géométriques
et, dans l'ensemble d'arrivée, les moyens arithmétiques correspondants (nombres rationnels).

3° on prolonge continûment pour obtenir la fonction logarithmique
$\mathbf{\log_a : \ ]0; \infty[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \log_a(x)}$.

Premières propriétés du logarithme

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(a) = 1$

$\log_a(a^n) = n$

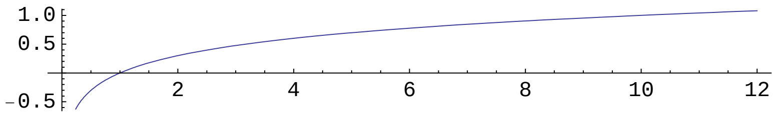
Nous verrons plus tard que cette dernière propriété est valable, non seulement pour tout $n \in \mathbb{Z}$ mais aussi pour tout $n \in \mathbb{R}$.

Logarithme décimal (ou logarithme vulgaire)

Le logarithme de base 10, noté **log**, est appelé logarithme décimal (ou logarithme vulgaire):

$$\log(x) = \log_{10}(x)$$

x	...	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	...
$\log(x)$	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...



Cette fonction est programmée sur votre calculatrice. Calculez

log(0.1), log(1), log(10), log(100).

Notez la propriété

$$\log(10^n) = n$$

Aujourd'hui, le logarithme décimal est encore utilisé pour quelques définitions traditionnelles, par exemple en chimie où il sert à définir le pH d'une solution.

<u>pH d'une solution</u>

Le pH d'une solution est l'opposé du logarithme décimal de la concentration des ions H^+, cette concentration étant exprimée en mole de ions H^+par mole de solution :

pH = - log[H^+] où [H^+] = concentration molaire de H^+.

Dire qu'une solution est de pH 7 signifie

- log[H^+] = 7

log[H^+] = -7

[H^+] = 10^{-7} c'est-à-dire qu'il y a 1 ion H^+ pour 10 millions de molécules de solution.

Logarithme naturel (ou logarithme népérien)

<u>Le nombre **e**</u>

Actuellement, pour les logarithmes, la base la plus utilisée est la base **e ≃2.718**

On peut obtenir le nombre **e** comme limite d'une série infinie

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

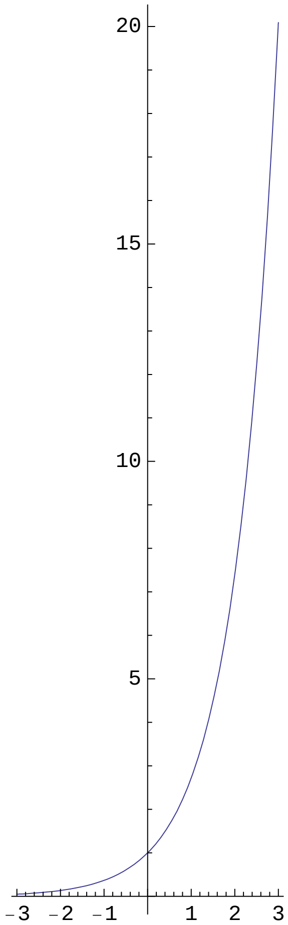
$$= 2.71828182845904523536028747135266249775724709370\ldots$$

En mathématiques, le nombre **e** est un nombre aussi important que le nombre π.
Les raisons pour lesquelles on a choisi cette base seront expliquées plus tard (simplification dans le calcul de la dérivée des fonctions exponentielles).

<u>L'exponentielle naturelle ou exponentielle de base **e**</u>

L'exponentielle de base **e** est appelée exponentielle naturelle et est aussi notée **exp** :

$\mathbf{exp(x)} = e^x$



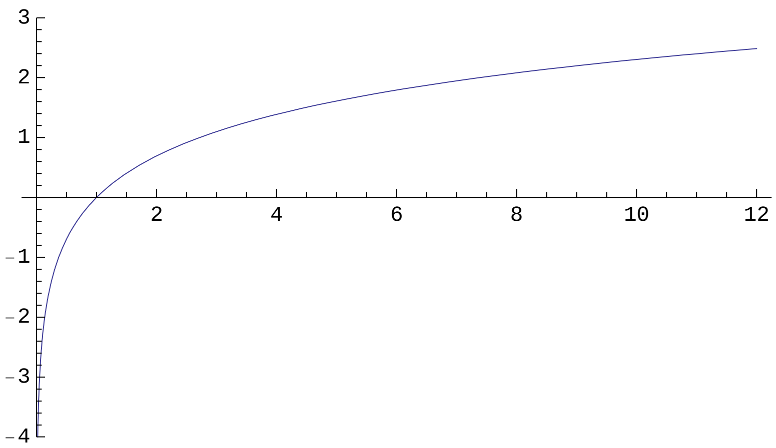
Cette fonction est programmée sur votre calculatrice. Calculez

e^1, e^2, e^{-1}.

<u>Le logarithme naturel ou logarithme de base **e**</u>

Le logarithme de base **e** est appelé <u>logarithme naturel</u> et est noté **ln**

$\mathbf{ln(x)} = \log_e(x)$



Le logarithme naturel a été introduit par le mathématicien écossais John Napier en 1614. C'est pourquoi il est aussi nommé logarithme népérien.

Cette fonction est programmée sur votre calculatrice. Calculez

ln(2), ln(10).

§ 3.2 Fonctions réciproques (cas particulier)

La propriété algébrique de réciprocité

Dans ce paragraphe, nous souhaitons affirmer que le "logarithme de base a" est la fonction réciproque de la fonction "exponentielle de base a".

Reprenons les tableaux donnés dans les définitions des fonctions exponentielle et logarithmique de base 10 :

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$f(x) = 10^x$	…	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	…

x	…	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	…
$g(x) = \log(x)$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

Composons les deux fonctions. Par exemple,

$$g(f(3)) = g(1000) = 3$$
$$g(f(-2)) = g(0.01) = -2$$
$$f(g(1000)) = f(3) = 1000$$
$$f(g(0.01)) = f(-2) = 0.01$$

Cette règle s'applique aussi aux valeurs intermédiaires :

$$g(f(x)) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
$$f(g(x)) = x \qquad \text{pour tout } x \in \left]0;\ \infty\right[$$

Dans une telle situation, on dit que les fonctions f et g sont réciproques l'une de l'autre et on note $g = {}^r f$.

Dans une autre notation,

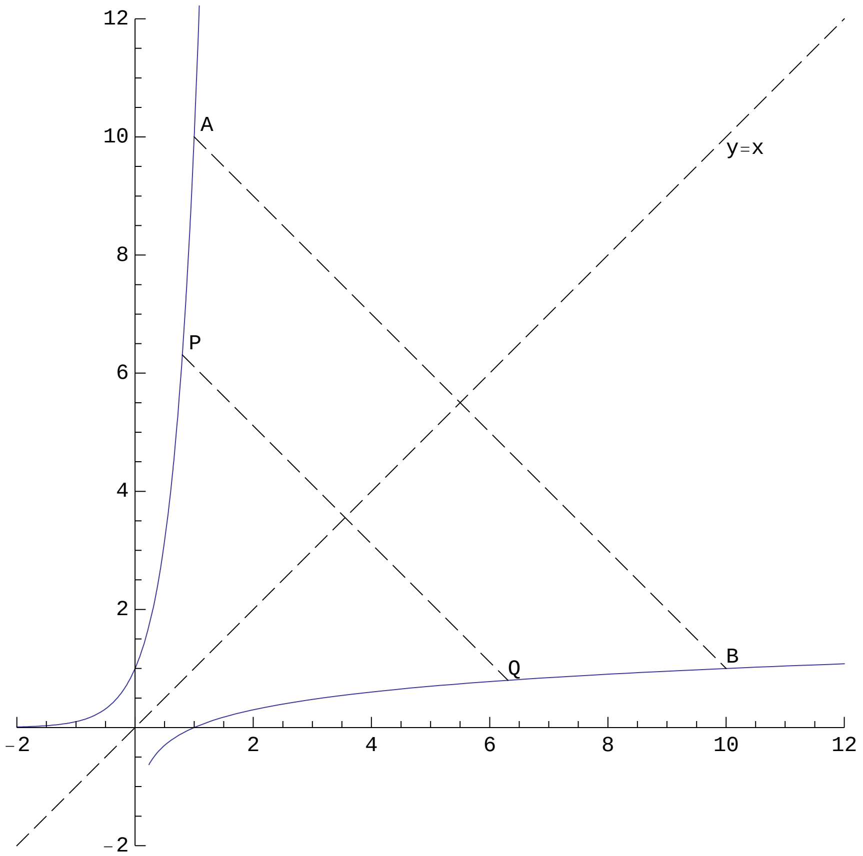
$$\log\left(10^x\right) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
$$10^{\log(x)} = x \qquad \text{pour tout } x \in \left]0;\ \infty\right[$$

Cette règle est valable dans toutes les bases $a \in]0;1[\cup]1;\infty[$

$$\log_a(a^x) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{pour tout } x \in]0;\infty[$$

■ Interprétation géométrique

Puisque f(1) = 10 et g(10) = 1, la courbe de *f* passe par le point A(1; 10) et la courbe de *g* passe par B(10; 1).



Les points $A(1;\ 10)$ et $B(10;\ 1)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
Plus généralement, à tout point P situé sur le graphe de *f* correspond le point Q situé sur le graphe de *g* tel que les points P, Q sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
Cette propriété caractérise deux fonctions réciproques.

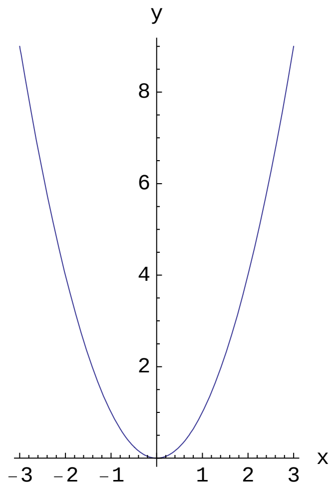
Plus généralement, on peut dire que
- * "le logarithme de base a" est la fonction réciproque de "l'exponentielle de base a" et
- * "l'exponentielle de base a" est la fonction réciproque du "logarithme de base a".

■ § 3.3 Fonctions réciproques (cas général)

Nous voulons maintenant définir la notion de fonction réciproque en général. Comme étape intermédiaire, nous passerons par l'exemple selon lequel la fonction "racine carrée" est la fonction réciproque de la fonction "élever au carré".

- Exemple 1 : une fonction non inversible

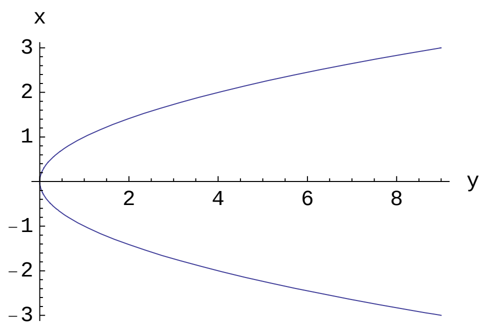
Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$.
Il s'agit bien d'une fonction car à tout $x \in \mathbb{R}$ correspond un et un seul $y = x^2$.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Pour obtenir la relation réciproque, au lieu d'aller de x vers y, inversons le sens
$y \mapsto x$
et, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, nous nous demandons quels x lui correspondent tels que $y = x^2$.

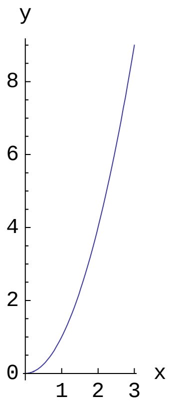
y	0	1	4	9
x	0	±1	±2	±3



Dans cet exemple, la relation réciproque $y \mapsto x$ n'est pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car
4 a deux images distinctes -2 et 2;
-1 n'a pas d'image.
On dit que la fonction f n'est pas inversible.

- Exemple 2 : la fonction "racine carrée"

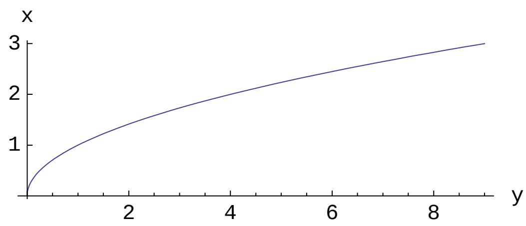
Considérons maintenant la fonction $g : [0;\ \infty[\longrightarrow [0;\ \infty[, \; x \mapsto x^2$.
Il s'agit bien d'une fonction car à tout nombre réel $x \in [0;\ \infty[$ correspond un et un seul $y \in [0;\ \infty[$ tel que $y = x^2$.



x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

La relation réciproque est

y	0	1	4	9
x	0	1	2	3



La relation réciproque est aussi une fonction car à tout $y \in [0;\ \infty[$ correspond un et un seul $x \in [0;\ \infty[$ tel que $y = x^2$.

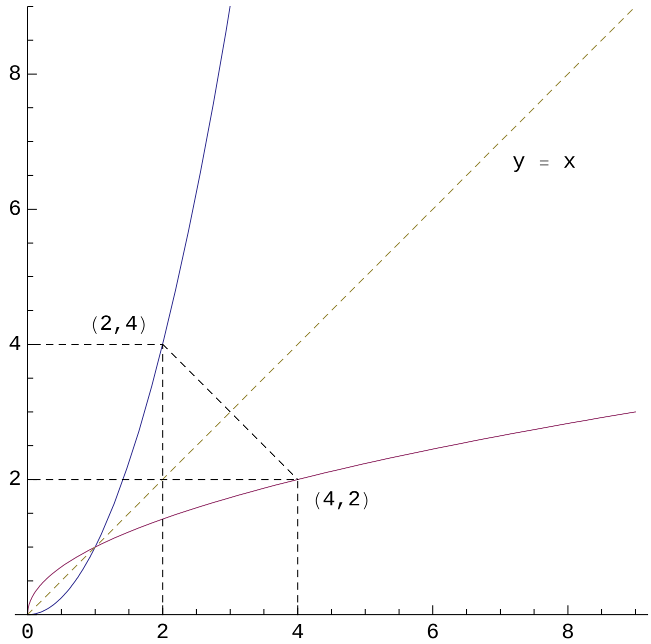
La fonction réciproque est la fonction "racine carrée" : $y \mapsto x = \sqrt{y}$.

Lorsqu'elle existe, la fonction réciproque de g est notée ^{r}g.

Ici, $g(x) = x^2$ et $^{r}g\,(y) = \sqrt{y}$.

<u>Interprétation graphique</u>

Le point (2, 4) appartient au graphe de la fonction g car g(2) = 4.
Le point (4, 2) appartient au graphe de la fonction réciproque ^{r}g car $^{r}g(4) = 2$.
Ces deux points sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant d'équation $y = x$.



Plus généralement, si $(x, y) \in G_g$ alors $(y, x) \in G_{({}^r g)}$ ce qui fait de la droite $y = x$ un axe de symétrie.

Propriétés

On a

$\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in [0; \infty[$;

$\left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ pour tout $y \in [0; \infty[$.

Plus généralement, en composant une fonction g avec sa réciproque ${}^r g$, on obtient l'identité :

${}^r g\,(g(x)) = x$ et $g({}^r g\,(y)) = y$.

Fonction inversible, fonction réciproque (définitions)

Soit $f : A \longrightarrow B,\ x \mapsto y = f(x)$ une fonction. En particulier, il est avéré que, à tout $x \in A$ correspond un et un seul $y \in B$ tel que $y = f(x)$.

On dit que la fonction f est **bijective** ou **inversible** si et seulement si à tout $y \in B$ correspond un et un seul $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Dans ce cas, f possède une réciproque qui est notée ${}^r f$:

${}^r f$: B⟶ A, y ↦ x = ${}^r f$(y)

Par définition, on a

$$\boxed{{}^r f\,(y) = x \Longleftrightarrow f\,(x) = y}$$

On a les relations

$\boldsymbol{{}^r f\,(f(x)) = x}$ pour tout $x \in A$;

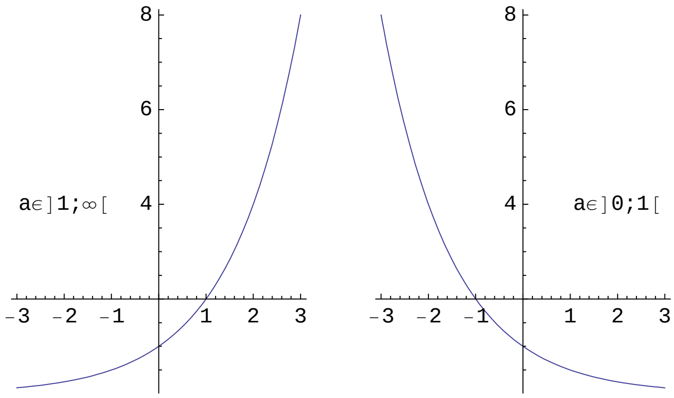
$\boldsymbol{f({}^r f\,(y)) = y}$ pour tout $y \in B$.

Exemple 3 : les fonctions logarithmiques

Partons de la fonction exponentielle de base a

$f : \mathbb{R} \longrightarrow\ ]0; \infty[\ ,\ x \mapsto y = a^x$ où $a = f(1)$.

Remarquez que l'ensemble d'arrivée de la fonction exponentielle a été restreint à l'ensemble des nombres positifs.



Dans le graphique, la première fonction est $f(x) = 2^x$ et la deuxième fonction est $g(x) = 0.5^x$.
Observez que f est strictement croissante et que g est strictement décroissante.

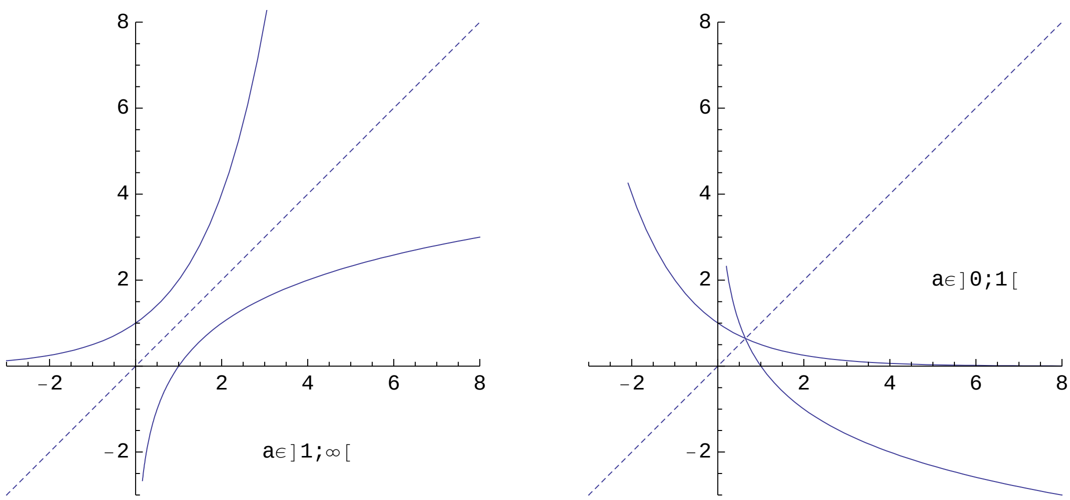
On peut voir sur les graphiques ci-dessus que la fonction exponentielle est bijective : à tout $y \in]0; \infty[$ correspond un et un seul $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

La "fonction exponentielle de base a" est donc inversible et sa fonction réciproque est le "logarithme de base a" noté $\log_a$:

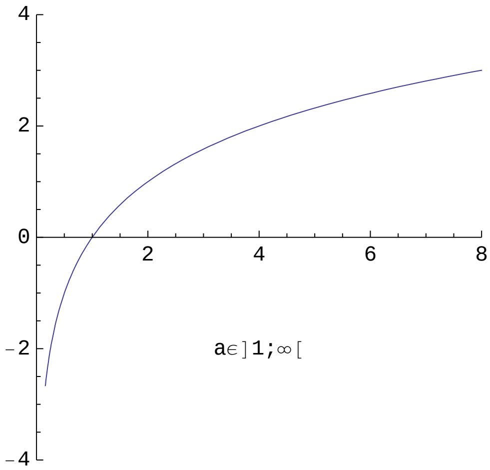
$$\mathbf{log_a :]0;\ \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ y \mapsto x = log_a(y)}$$

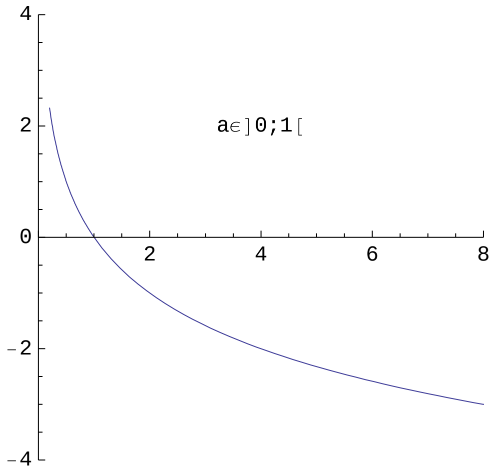
$$\boxed{\log_a(y) = x \Longleftrightarrow a^x = y}$$

A partir du graphique de la fonction exponentielle de base a, par symétrie, construisons le graphique de la fonction logarithmique de base a



On obtient ainsi les graphiques des fonctions logarithmiques :





Remarquez que le logarithme d'un nombre ≤ 0 n'est pas défini.

■ § 3.4 Propriétés des logarithmes

■ Propriété fondamentale du logarithme

On a par exemple
$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(2^2 \cdot 2^3) = \log_2(2^{2+3}) = 2 + 3 = \log_2(2^2) + \log_2(2^3) = \log_2(4) + \log_2(8)$.
Cette propriété se laisse généraliser $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

■ Propriétés des logarithmes (voir *Formulaires et tables* p. 14)

1° $\mathbf{\log_a(1) = 0}$
$\mathbf{\log_a(a) = 1}$

2° $\mathbf{\log_a(a^x) = x}$
$\boldsymbol{a^{\log_a(y)} = y}$

3° $\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)}$

4° $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)}$
$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$

5° $\boldsymbol{\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)}$

■ § 3.5 [Démonstrations] Propriétés des logarithmes

<u>Démonstration de 1° et de 2°</u>

En notant $f(x) = a^x$, ${}^{r}f\,(y) = \log_a(y)$, on a

$a^0 = 1 \Longleftrightarrow f(0) = 1 \Longleftrightarrow {}^{r}f\,(1) = 0 \Longleftrightarrow \log_a(1) = 0$.
$a^1 = a \Longleftrightarrow f(1) = a \Longleftrightarrow {}^{r}f\,(a) = 1 \Longleftrightarrow \log_a(a) = 1$.

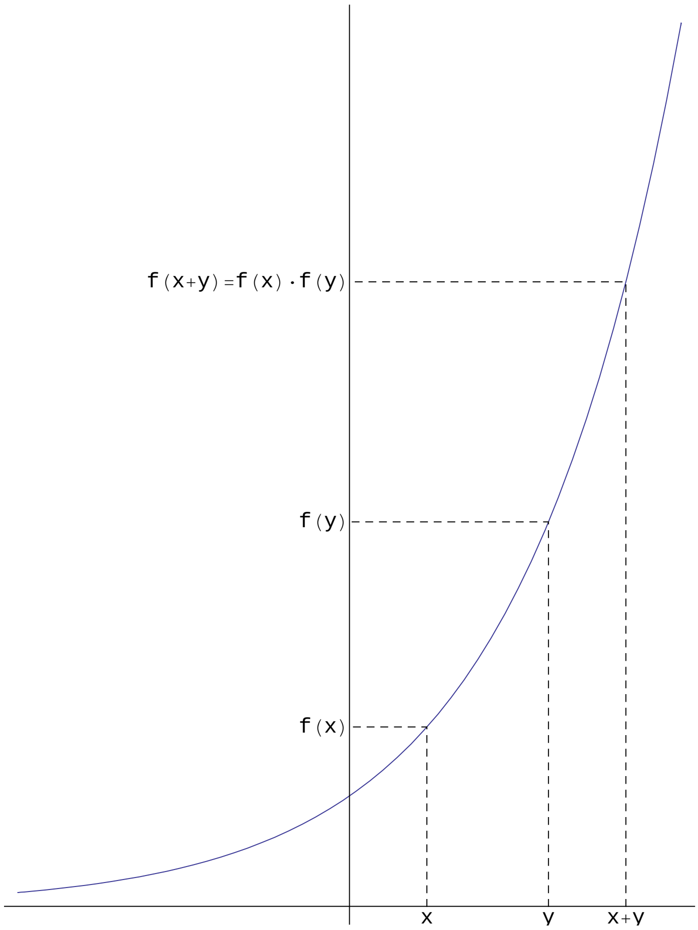
${}^{r}f\,(f(x)) = x \Longleftrightarrow \log_a(a^x) = x$

$$f(f(y)) = y \Longleftrightarrow a^{\log_a(y)} = y$$

<u>Commentaire de 3°</u>

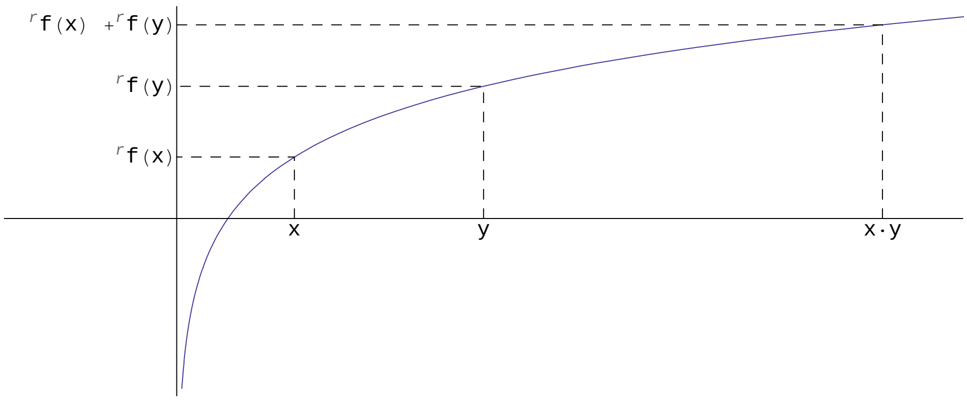
La fonction exponentielle $f(x) = a^x$ a la propriété $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. En effet,

$$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x + y)$$



A l'addition sur l'axe des abscisses correspond la multiplication sur l'axe des ordonnées.

Pour la fonction réciproque, après avoir effectué une symétrie autour de l'axe y = x, on doit avoir la propriété "à la multiplication sur l'axe des abscisses correspond l'addition sur l'axe des ordonnées"



c'est-à-dire

$$^r f(x) + {}^r f(y) = \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y) = {}^r f(x \cdot y)$$

Evitez les confusions ! Par exemple, il n'existe pas de formule générale pour exprimer $\log_a(x+y)$. N'inventez pas de nouvelles formules ! Consultez le formulaire.

Démonstration de 3°

Posons $x = a^u$ et $y = a^v$ c'est-à-dire $u = \log_a(x)$ et $v = \log_a(y)$. Alors

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^u \cdot a^v) = \log_a(a^{u+v}) = u + v = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Démonstration de 4°

Utilisons les règles 3° puis 1°

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) + \log_a(x) = \log_a\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \log_a(1) = 0 \Longrightarrow \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

Utilisons la règle 3° puis la première règle du 4°

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Démonstration de 5°

D'une part, posons $u = \log_a(x)$ d'où $x = a^u$ et calculons $x^n = (a^u)^n = a^{u \cdot n} = a^{n \cdot u}$

D'autre part, posons $v = \log_a(x^n)$ et calculons $x^n = a^v$.

En comparant les exposants, $v = n \cdot u$ c'est-à-dire $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$.

■ § 3.6 Changements de base

■ Changement de base des logarithmes

On veut comparer $u = \log_a(x)$ et $v = \log_b(x)$.

On a donc $x = a^u$ et $x = b^v$ d'où $a^u = b^v$.

Prenons le logarithme des deux membres

$$\log_b(a^u) = \log_b(b^v) \Longleftrightarrow u \cdot \log_b(a) = v \Longleftrightarrow \log_a(x) \cdot \log_b(a) = \log_b(x)$$

d'où la formule de changement de base :

$$\mathbf{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$$ (voir *Formulaires et tables* p. 14)

En particulier

$$\mathbf{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$ (voir *Formulaires et tables* p. 67)

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \simeq 0.434294 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} \simeq 2.30259 \cdot \log(x)$$

Les fonctions logarithmiques de deux bases fixées sont proportionnelles.

■ Changement de base des exponentielles

$a^x = b^y \Longleftrightarrow \log_b(a^x) = y \Longleftrightarrow x \cdot \log_b(a) = y$

d'où la formule de changement de base des exponentielles

$$\mathbf{a^x = b^{x \cdot \log_b(a)}}$$

En particulier,

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$ (voir *Formulaires et tables* p. 67)

$$10^x = e^{x \cdot \ln(10)} \simeq e^{2.30259 \cdot x}$$
$$e^x = 10^{x \cdot \log(e)} \simeq 10^{0.434294 \cdot x}$$

§ 4 Equations exponentielles et logarithmiques

■ Un exemple d'équation exponentielle

Une certaine population croît de 0.8 % par an.
Après combien de temps la polulation aura-t-elle doublé ?

$$P_n = P_0 \, (1 + i)^n \qquad \text{où} \quad i = 0.008$$
$$\frac{P_n}{P_0} = (1 + i)^n$$
$$2 = 1.008^n$$

On reconnaît une équation exponentielle au fait que l'inconnue apparaît en exposant.
Pour la résoudre, après avoir vérifié que les deux membres sont positifs, on prend le logarithme des deux membres:

$$\ln(2) = \ln\left(1.008^n\right) = n \cdot \ln(1.008) \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.008)} \simeq 86.99 \text{ ans.}$$

Remarquez que l'usage d'un logarithme d'une autre base conduit au même résultat :

$$\log(2) = \log\left(1.008^n\right) = n \cdot \log(1.008) \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log(2)}{\log(1.008)} \simeq 86.99 \text{ ans.}$$

■ Un exemple d'équation logarithmique

Soit à résoudre l'équation **2·ln(x) = 5**

L'idée générale consiste à appliquer la fonction exponentielle aux deux membres de l'équation.

$$2 \cdot \ln(x) = 5$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2 \ln(x) = 5$$
$$\Longleftrightarrow \quad \ln(x) = \frac{5}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad e^{\ln(x)} = e^{\frac{5}{2}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad x = e^{\frac{5}{2}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad x \in S = \left\{ e^{\frac{5}{2}} \right\}$$

■ Difficultés des équations logarithmiques

Les équations logarithmiques présentent des difficultés spécifiques. Les règles

$$\ln(x\, y) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln(x^n) = n \ln(x)$$

ne sont valables que sous l'hypothèse $x > 0$ et $y > 0$. Lorsqu'on utilise ces règles pour des nombres réels quelconques, ces transformations peuvent modifier l'ensemble de définition de l'expression:

ln(x y) est défini pour x < 0 et y < 0,
ce qui n' est pas le cas de ln(x)+ln(y) ;

$\ln(x^2)$ est défini pour x < 0,
ce qui n'est pas le cas de $2\ln(x)$.

De telles transformations induisent deux sortes de dangers. D'une part, si on élargit l'ensemble des solutions, on risque d'obtenir des solutions étrangères qu'il faudra éliminer. D'autre part, si on rétrécit l'ensemble de définition, on risque de n'obtenir qu'une partie des solutions.

■ Elargissement de l'ensemble de définition

<u>Calcul erroné</u>

Soit à résoudre l'équation **2·ln(x) = 5**

$$2\ln(x) = 5$$
$$\ln(x^2) = 5$$
$$e^{\ln(x^2)} = e^5$$
$$x^2 = e^5$$
$$S = \left\{-\sqrt{e^5}, \sqrt{e^5}\right\} = \left\{-e^{\frac{5}{2}}, e^{\frac{5}{2}}\right\}$$

Le calcul précédent est faux car, si on remplace $x = -e^{\frac{5}{2}}$ dans l'équation donnée, l'expression n'est pas définie. Dans le calcul, on a remplacé

$2\ln(x)$ par $\ln(x^2)$

ce qui élargit l'ensemble de définition car, implicitement, on a remplacé la condition

$x > 0$ par $x \neq 0$

Les transformations suivantes peuvent élargir l'ensemble de définition

remplacer	$\ln(x) + \ln(y)$	par	$\ln(x\,y)$
remplacer	$\ln(x) - \ln(y)$	par	$\ln\left(\frac{x}{y}\right)$
remplacer	$n\ln(x)$	par	$\ln(x^n)$

Les règles complètes sont les suivantes

$\ln(x) + \ln(y) = c$	$\Longleftrightarrow$	$(\ln(x\,y) = c \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0)$
$\ln(x) - \ln(y) = c$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) = c \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0\right)$
$2\ln(x) = c$	$\Longleftrightarrow$	$(\ln(x^2) = c \text{ et } x > 0)$

Pour calculer correctement, <u>on détermine au départ l'ensemble de définition de l'équation</u> puis, à la fin, on élimine les solutions qui n'y appartiennent pas.

<u>Calcul correct</u>

Soit à résoudre l'équation **2·ln(x) = 5**

$2\ln(x) = 5$	condition : $x > 0$
$\ln(x^2) = 5$	〃
$e^{\ln(x^2)} = e^5$	〃
$x^2 = e^5$	〃
$x = \pm\sqrt{e^5}$	et $x > 0$
$x = \sqrt{e^5} = e^{\frac{5}{2}}$	

■ Rétrécissement de l'ensemble de définition

<u>Calcul erroné</u>

Soit à résoudre l'équation **$\ln(x^2) = 5$**

$$\ln\left(x^2\right) = 5$$
$$2\ln(x) = 5$$
$$\ln(x) = \frac{5}{2}$$
$$e^{\ln(x)} = e^{\frac{5}{2}}$$
$$x = e^{\frac{5}{2}}$$

Le calcul précédent est faux car l'équation donnée admet aussi comme solution $x = -e^{\frac{5}{2}}$. Dans le calcul, on a remplacé

$$\ln\left(x^2\right) \quad \text{par} \quad 2\ln(x)$$

ce qui rétrécit l'ensemble de définition car, implicitement, on a remplacé la condition

$$x \neq 0 \quad \text{par} \quad x > 0$$

Les transformations suivantes peuvent rétrécir l'ensemble de définition

remplacer	$\ln(x\,y)$	par	$\ln(x) + \ln(y)$
remplacer	$\ln\left(\frac{x}{y}\right)$	par	$\ln(x) - \ln(y)$
remplacer	$\ln(x^n)$	par	$n\ln(x)$

Pour calculer correctement, <u>il faut éviter les transformations qui rétrécissent l'ensemble de définition</u>.

<u>Calcul correct</u>

Soit à résoudre l'équation **$\ln(x^2) = 5$**

$$\ln\left(x^2\right) = 5$$
$$e^{\ln\left(x^2\right)} = e^5$$
$$x^2 = e^5$$
$$x = \pm\sqrt{e^5} = \pm e^{\frac{5}{2}}$$
$$S = \left\{-e^{\frac{5}{2}},\ e^{\frac{5}{2}}\right\}$$