Géométrie métrique

2-ème année niveau avancé
3-ème année niveau standard

Edition 2007-2008
DELM

§ 3 et § 4 Géométrie analytique 2D

■ Liens hypertextes

Exercices de géométrie analytique 2D:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/GeomAnalytique2D/GA2D-Exercices.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

La géométrie analytique (Note historique)

La géométrie est la science qui étudie les figures dans le plan et dans l'espace. On attribue généralement à la civilisation grecque le mérite de la première étude systématique de ces figures. Dans ses *Eléments*, Euclide (3-ème siècle avant J.-C.) réalise la première synthèse des connaissances en géométrie de son époque. A partir du 9-ème siècle, les mathématiciens du monde arabe développent des méthodes algébriques tout en s'appuyant sur une représentation géométrique des grandeurs impliquées dans leurs calculs et transformations. La géométrie analytique naît de la rencontre de l'algèbre et de la géométrie.

Pour représenter les objets dont elle veut étudier les propriétés, la géométrie analytique utilise les systèmes de coordonnées dans le plan comme dans l'espace. Bien que déjà en partie présente chez Archimède et Apollonius (*les Coniques*) au 3-ème siècle avant J.-C., c'est à l'époque de Descartes (première partie du 16-ème siècle) que la méthode est systématisée et permet alors de représenter les courbes algébriques et les figures à l'aide de systèmes d'équations ou d'inéquations. Elle utilise le fait que toute propriété géométrique peut s'exprimer algébriquement et que, inversément, tout résultat algébrique possède une représentation géométrique. Dans le plan, on parle dès lors des coordonnées d'un point, de l'équation d'une droite, de celle d'un cercle ou d'une courbe en général. Dans l'espace, on obtient en plus l'équation d'une surface. Chaque objet géométrique est ainsi identifiable à une équation ou un système d'équations traduisant fidèlement ses propriétés.

La méthode sera développée par Euler (1707-1783) et Lagrange (1736-1813) notamment. Certains concepts de type algébrique ainsi que le calcul différentiel permettent de généraliser et de prolonger l'étude des courbes et des surfaces.

Les avantages de la méthode dite analytique sont nombreux. On peut citer:
- l'interprétation géométrique des équations et inéquations,
- la représentation des fonctions et des courbes en général,
- la possibilité d'interpréter les relations algébriques,
- l'expression plus aisée de certaines démonstrations,
- la recherche de lieux géométriques.

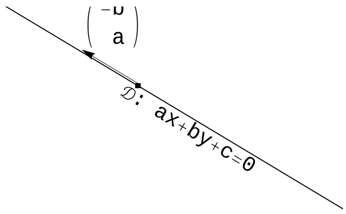
Les développements technologiques qui ont accompagné l'apparition de l'ordinateur ont permis de tirer profit de la méthode dite analytique. Ainsi l'infographie, dont la tâche essentielle est la création de courbes, d'images et la production d'animations, en fait un usage quasi systématique.

Notons cependant que, si la géométrie dite analytique est largement utilisée comme mode de représentation, elle n'est pas le seul point de vue digne d'intérêt. La géométrie synthétique, la géométrie descriptive et la géométrie des transformations, par exemple, sont d'autres approches pertinentes de la géométrie.

§ 3 Droite

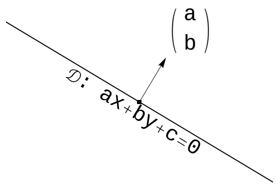
■ Vecteur directeur, vecteur normal

Vecteur directeur



Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ est $\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Vecteur normal

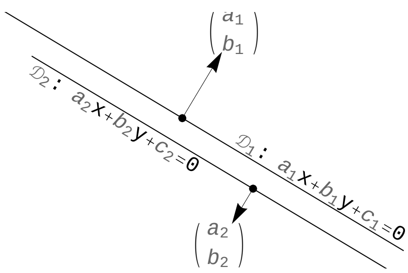


Un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

L'équation de la droite peut aussi s'écrire sous la forme $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ où A est un point d'attache et $P(x,\ y)$ un point courant.

■ Positions relatives de deux droites

Droites parallèles



Les deux droites d'équations $\begin{cases} \mathcal{D}_1: & a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ \mathcal{D}_2: & a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont linéairement dépendants:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1\,b_2 - b_1\,a_2 = 0$$

Droites confondues

Les deux droites d'équations $\begin{cases} \mathcal{D}_1 : & a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ \mathcal{D}_2 : & a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$ sont confondues si et seulement si les coefficients sont proportionnels:

il existe un nombre réel k (appelé *constante de proportionnalité*) tel que

$$a_2 = k\,a_1, \quad b_2 = k\,b_1 \quad \text{et} \quad c_2 = k\,c_1.$$

On dit alors que leurs équations sont équivalentes.

Droites strictement parallèles

Deux droites sont strictement parallèles si et seulement si elles sont parallèles et non confondues.

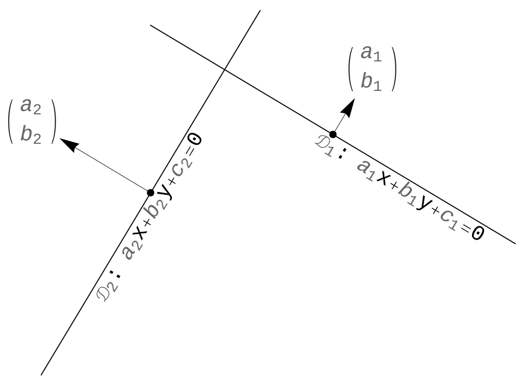
Il s'ensuit que deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont confondues ou strictement parallèles.

Droites sécantes

Deux droites sont sécantes si et seulement si leur intersections n'est pas vide.

Il s'ensuit que deux droites sont sécantes si et seulement si elles ne sont pas strictement parallèles, c'est-à-dire si et seulement si elles sont confondues ou non parallèles.

Droites perpendiculaires



Les deux droites d'équations $\begin{cases} \mathcal{D}_1 : & a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ \mathcal{D}_2 : & a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$ sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1\,a_2 + b_1\,b_2 = 0$$

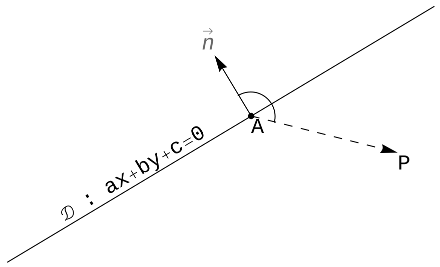
■ Position relative d'un point et d'une droite

Considérons une droite $\mathcal{D}$ d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$, un point d'attache de la droite $A(x_0,\ y_0)$ et un point quelconque du plan $P(x,\ y)$.

En ternant compte de $a\,x_0 + b\,y_0 + c = 0$, on a

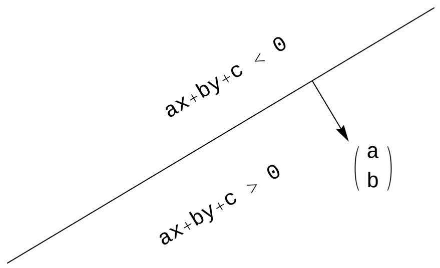
$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} =$$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (x - x_0)\ a + (y - y_0)\ b = (a\,x + b\,y) + (-a\,x_0 - b\,y_0) = a\,x + b\,y + c$$



En raisonnant sur le signe de $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}$, on peut distinguer trois situations:

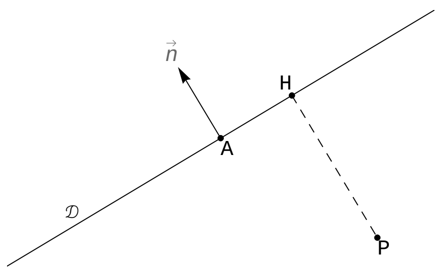
* P appartient au *demi-plan ouvert pointé par le vecteur normal*, d'inéquation $a\,x + b\,y + c > 0$;
* P appartient à la *droite* d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$;
* P appartient à l'*autre demi-plan ouvert*, d'inéquation $a\,x + b\,y + c < 0$.



■ Distance d'un point à une droite

On donne un point $P(x_1,\ y_1)$ du plan et une droite $\mathcal{D}$ d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$.
La distance du point P à la droite $\mathcal{D}$ est égale au minimum de la distance PH avec $H \in \mathcal{D}$. Le minimum est atteint lorsque $\overrightarrow{HP}$ est orthogonal à la droite:

$$\text{dist}\,(P,\ \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{HP}\| \qquad \text{où} \qquad H \in \mathcal{D} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{HP} \perp \mathcal{D}$$



La condition $\overrightarrow{HP} \perp \mathcal{D}$ peut aussi s'écrire $\overrightarrow{HP} = \lambda\,\vec{n}$ où λ est un nombre réel que nous allons calculer. Les coordonnées de H étant $H(x,\ y)$, écrivons l'équation vectorielle en composantes

$$\begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Multiplions la première équation par a et la deuxième par b

$$\begin{cases} a\ (x_1 - x) = \lambda\, a^2 \\ b\ (y_1 - y) = \lambda\, b^2 \end{cases}$$

puis additionnons membre à membre

$$a\,x_1 + b\,y_1 - a\,x - b\,y = \lambda\,(a^2 + b^2)$$

La condition $H \in \mathcal{D}$ peut aussi s'écrire $a x + b y + c = 0$, c'est-à-dire $c = -a x - b y$. En remplaçant,

$$a x_1 + b y_1 + c = \lambda \left(a^2 + b^2\right)$$

$$\lambda = \frac{a x_1 + b y_1 + c}{a^2 + b^2}$$

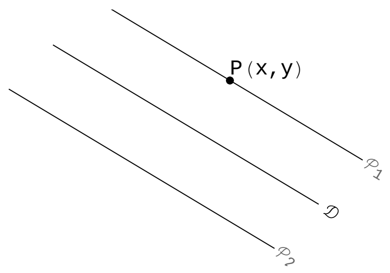
On peut maintenant calculer la distance du point à la droite

$$\text{dist}(P, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{HP}\| = \|\lambda \vec{n}\| = |\lambda| \, \|\vec{n}\| = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\text{dist}(P, \mathcal{D}) = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$ (voir *Formulaires et tables*)

<u>Parallèles à une distance donnée d'une droite</u>

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $a x + b y + c = 0$ et d un nombre réel non négatif.
Le lieu géométrique des points $P(x, y)$ situés à la distance d de $\mathcal{D}$ est la réunion de deux droites parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.



En effet,

$$\text{dist}(P, \mathcal{D}) = d \iff \frac{|a x + b y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d$$

$$\iff |a x + b y + c| = d \sqrt{a^2 + b^2}$$

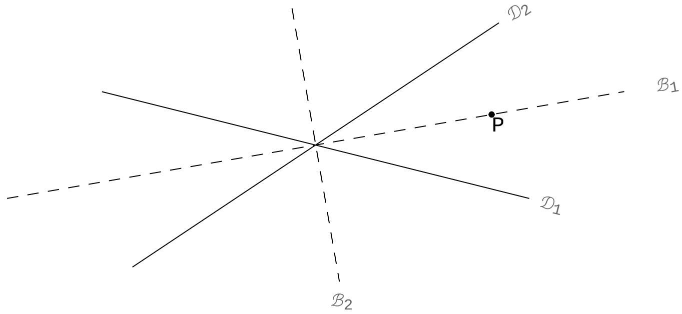
$$\iff a x + b y + c = d \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad a x + b y + c = -d \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\iff \mathcal{P}_1 : a x + b y + \left(c - d \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 0$$

$$\text{ou} \quad \mathcal{P}_2 : a x + b y + \left(c + d \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 0$$

■ Bissectrices de deux droites

Etant donné deux droites non parallèles $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, le lieu géométrique des points P qui sont équidistants de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ est la réunion de deux droites $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ dénommées bissectrices.



Soient $\begin{cases} \mathcal{D}_1: & a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ \mathcal{D}_2: & a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$ les équations des deux droites et $P(x,y)$ un point quelconque du plan.

Le point $P(x,\ y)$ appartient aux bissectrices des deux droites si et seulement si

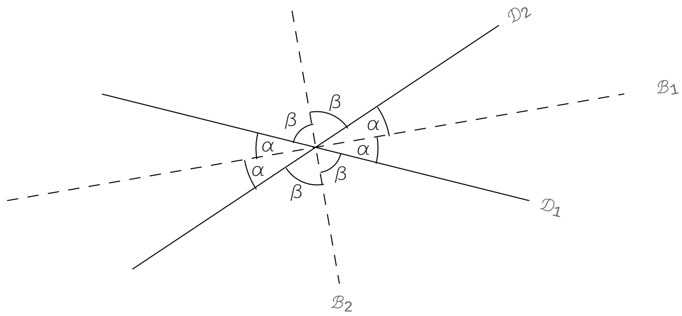
$$\text{dist}\,(P,\,\mathcal{D}_1) = \text{dist}\,(P,\,\mathcal{D}_2)$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{|a_1\,x + b_1\,y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2\,x + b_2\,y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{B}_1: & \dfrac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \dfrac{a_2\,x + b_2\,y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ \text{ou}\quad \mathcal{B}_2: & \dfrac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \dfrac{-a_2\,x - b_2\,y - c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \end{array}}$$

(Voir *Formulaires et tables*)

Montrons que les bissectrices sont perpendiculaires. En effet,



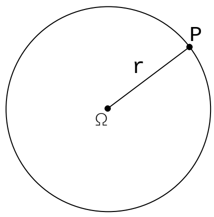
$$4\,\alpha + 4\,\beta = 360\,° \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha + \beta = 90\,°$$

§ 4 Cercle

■ Equation du cercle

<u>Equation du cercle, première forme</u>

Etant donné un point Ω et un nombre réel positif r, l'ensemble des points P du plan qui sont situés à la distance r de Ω est le cercle de centre Ω de rayon r.



Notons $\Omega(x_0,\ y_0)$ les coordonnées du centre. Le point $P(x,\ y)$ appartient au cercle si et seulement si

$$\mathrm{dist}(\Omega,\ P) = r \iff \| \overrightarrow{\Omega P} \| = r \iff \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| = r$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \iff \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

(Voir *Formulaires et tables*).

Equation du cercle, deuxième forme

Par exemple, le cercle de centre $\Omega(3;\ 2)$ de rayon $r = 5$ a pour équation

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

En généralisant, on obtient la proposition:

l'équation d'un cercle peut se mettre sous la forme suivante (appelée *deuxième forme*):

$$\boxed{x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0}$$

où $a,\ b,\ c$ sont des coefficients réels.

Nous allons montrer que la réciproque de cette proposition est fausse.
Exemple A:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 32 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = -32 + 9 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = -7$$

$$S = \{\}$$

Exemple B:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = -25 + 9 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 0$$

$$S = \{(3;\ 4)\}$$

Exemple C:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = -12 + 9 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 13$$

$$S = \text{cercle de centre } \Omega\,(3;\ 4) \text{ de rayon } r = \sqrt{13}$$

En généralisant,

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

$$x^2 + a\,x + \frac{a^2}{4} + y^2 + b\,y + \frac{b^2}{4} = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

On obtient alors la proposition suivante:

l'équation $x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$ représente

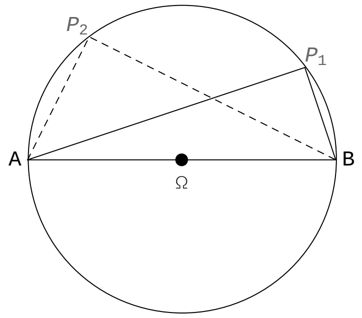
soit l'ensemble vide,

soit le point $\Omega\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$,

soit le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$.

<u>Equation du cercle de diamètre AB</u>

On donne deux points distincts A et B. Le lieu géométrique des points P d'où l'on voit le segment AB sous un angle droit est le cercle de diamètre AB.



En effet, en notant Ω le point milieu du segment AB et $r = \frac{AB}{2}$, on a successivement

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \left(\overrightarrow{P\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}\right) \cdot \left(\overrightarrow{P\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}\right) =$$

$$\overrightarrow{P\Omega}^2 + \overrightarrow{P\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{P\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{P\Omega}^2 + \overrightarrow{P\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}\right) + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B} =$$

$$\overrightarrow{P\Omega}^2 + \overrightarrow{P\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{\Omega A}\right) + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \left(-\overrightarrow{\Omega A}\right) = \overrightarrow{P\Omega}^2 - \overrightarrow{\Omega A}^2 = \overrightarrow{P\Omega}^2 - r^2$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P\Omega}^2 = r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\| \overrightarrow{P\Omega} \right\| = r$$

$$\Longleftrightarrow \quad P \in (\text{cercle de centre } \Omega \text{ de rayon } r) \qquad \blacksquare$$

Pour déterminer l'équation du cercle de diamètre AB, notons $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ les coordonnées des extrémités du segment.

$$P(x, y) \in (\text{cercle de diamètre AB}) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

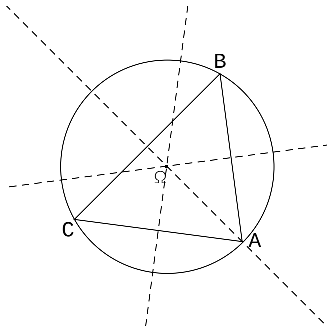
<u>Equation du cercle par trois points non alignés</u>

Etant donné trois points A, B et C, cherchons le cercle qui passe par ces trois points.

Dans la méthode géométrique, on cherche le centre Ω du cercle. Puisque Ω est équidistant de A et B, il s'ensuit que Ω appartient à la médiatrice du segement AB. De même, puisque Ω est équidistant de B et C, il s'ensuit que Ω appartient à la médiatrice du segement BC. Le point Ω est donc situé à l'intersection des médiatrices de AB et de BC (voir figure).

Des relations ΩA = ΩB et ΩB = ΩC, on déduit ΩA = ΩC ce qui montre que le point Ω appartient aussi à la médiatrice de AC. On a ainsi établi que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et leur point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.

En particulier, si les points A, B et C ne sont pas alignés, il existe un et un seul cercle qui passe par ces trois points.



Dans la méthode algébrique, on cherche l'équation du cercle qui passe par les trois points $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. L'équation cherchée est de la forme

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

Les trois points A, B, C appartiennent au cercle si et seulement si

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + a\,x_1 + b\,y_1 + c &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + a\,x_2 + b\,y_2 + c &= 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + a\,x_3 + b\,y_3 + c &= 0 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système de trois équations linéaires à trois inconnues a, b, c.
Si les points ne sont pas alignés, le système est régulier (c'est-à-dire il possède une et une seule solution).

■ Position relative d'un point et d'un cercle

Considérons le cercle de centre $\Omega(x_0,\ y_0)$ de rayon r, ainsi qu'un point quelconque du plan $P(x,\ y)$. On peut distinguer trois situations:

* le point P appartient au <u>disque ouvert</u> de centre Ω de rayon r représenté par l'inéquation

$$\text{dist}(\Omega, P) < r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

* le point P appartient au <u>cercle</u> de centre Ω de rayon r représenté par l'équation

$$\text{dist}(\Omega, P) = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

* le point P appartient à l'<u>extérieur du disque fermé</u> de centre Ω de rayon r représenté par l'inéquation

$$\text{dist}(\Omega, P) > r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$$

■ Intersections

<u>Intersection d'un cercle et d'une droite</u>

Pour déterminer l'intersection d'un cercle $\mathcal{C}$ et d'une droite $\mathcal{D}$,

$$\begin{cases} \mathcal{C}: & x^2 + y^2 + a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ \mathcal{D}: & a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$$

on procède ainsi: de l'équation de la droite (qui est de degré 1), on tire x ou y qu'on remplace dans l'équation du cercle; on obtient ainsi une équation du deuxième degré à une inconnue.

<u>Intersection de deux cercles, axe radical</u>

Pour déterminer l'intersection de deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$,

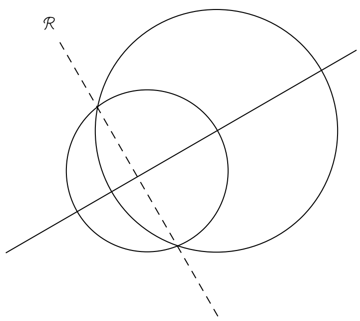
$$\begin{cases} C_1 : & x^2 + y^2 + a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ C_2 : & x^2 + y^2 + a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$$

on commence par soustraire les deux équations:

$$\mathcal{R} : \quad (a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + (c_1 - c_2) = 0$$

Si les deux cercles ont des centres distincts, l'équation ainsi formée représente une droite $\mathcal{R}$ appelée *axe radical des deux cercles*.
Cette droite est perpendiculaire à la droite des centres $\Omega_1\left(-\frac{a_1}{2},\ -\frac{b_1}{2}\right)$, $\Omega_2\left(-\frac{a_2}{2},\ -\frac{b_2}{2}\right)$.

Si les deux cercles sont sécants, l'axe radical contient les points d'intersection des deux cercles.



On peut donc ramener le problème à l'intersection d'un cercle C_1 et d'une droite $\mathcal{R}$:

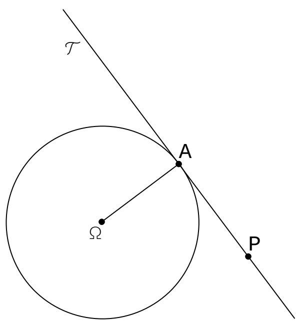
$$\begin{cases} C_1 : & x^2 + y^2 + a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ \mathcal{R} : & (a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + (c_1 - c_2) = 0 \end{cases}$$

■ Tangentes au cercle

■ Tangentes par un point du cercle

<u>Tangente par un point du cercle, première forme</u>

La tangente $\mathcal{T}$ qui passe par le point A du cercle est caractérisée par sa perpendicularité au rayon $\overrightarrow{A\Omega}$:



Avec les notations $\Omega(x_0,\ y_0)$, $A(x_1,\ y_1)$, le point $P(x,\ y)$ appartient à la tangente $\mathcal{T}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{T} : \quad (x_0 - x_1)\,(x - x_1) + (y_0 - y_1)\,(y - y_1) = 0$$

<u>Tangente par un point du cercle, deuxième forme</u>

Montrons la proposition suivante:

$P \in \mathcal{T}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega P} = r^2$. En effet,

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{\Omega A} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AP}\right) = \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AP} = \left(\| \overrightarrow{\Omega A} \| \right)^2 + 0 = r^2 \qquad \blacksquare$$

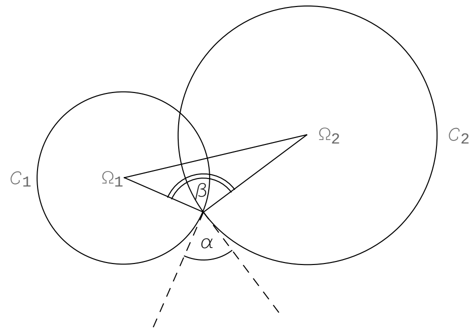
On peut donc aussi écrire l'équation de la tangente de la manière suivante (voir *Formulaires et tables*):

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega P} = r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = r^2$$

$$\boxed{\mathcal{T}: \quad (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2}$$

<u>Angle entre deux cercles</u>

Par définition, l'angle entre deux cercles sécants C_1, C_2 est l'angle entre les tangentes en un point d'intersection; plus précisément, il s'agit de l'angle entre les demi-tangentes extérieures (angle α dans la figure).

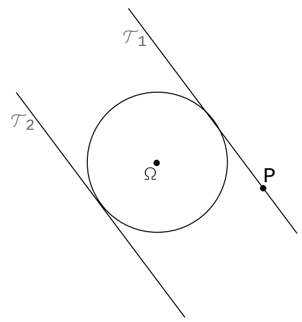


On remarquera que l'on a $\alpha + \beta = 180°$.
Une méthode consiste à déterminer d'abord l'angle β (appelé *angle entre les rayons en un point d'intersection*);
on en déduit ensuite $\alpha = 180° - \beta$; on évite ainsi le calcul des tangentes.

Dans le cas particulier où l'angle entre les deux cercles est droit, on dit que les deux cercles sont orthogonaux.

<u>Tangentes de pente *m*</u>

Un nombre réel m et un cercle C étant donnés, il existe deux droites $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ de pente m tangentes à C.



Notons $\Omega(x_0, y_0)$ le centre du cercle et r le rayon. Les tangentes cherchées sont de la forme $\mathcal{T}: \; m x - y + p = 0$ où p est à déterminer.

$$\text{dist}(\Omega, \mathcal{T}) = r \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{| m x_0 - y_0 + p |}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

$$\Longleftrightarrow \quad |m x_0 - y_0 + p| = r\sqrt{m^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad m x_0 - y_0 + p = \pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad p = -m x_0 + y_0 \pm r\sqrt{m^2+1}$$

Le point $P(x,\ y)$ appartient aux tangentes cherchées si et seulement si

$$y = m x + \left(-m x_0 + y_0 \pm r\sqrt{m^2+1}\right)$$

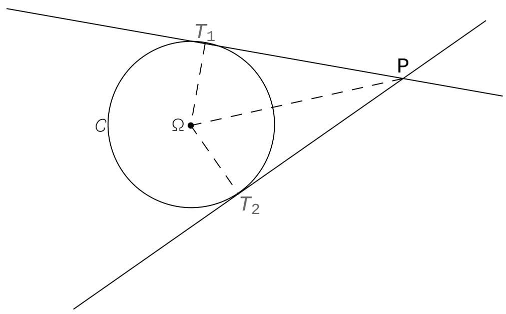
$$\boxed{\mathcal{T}_1,\ \mathcal{T}_2:\quad y - y_0 = m\,(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$ (Voir *Formulaires et tables*)

On remarquera que l'équation $y - y_0 = m(x - x_0)$ représente la droite de pente m qui passe par le centre.

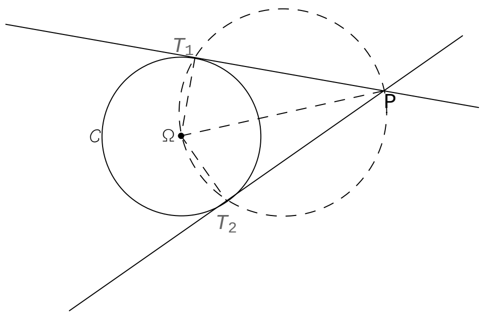
■ Tangentes par un point extérieur au cercle: points de tangence

<u>Cercle de Thalès</u>

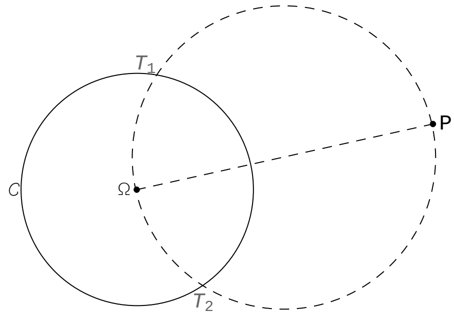
On donne le cercle C de rayon r ainsi qu'un point P extérieur au cercle.
On cherche les coordonnées des points de contact T_1, T_2 des tangentes à C issues de P.



Les points de tangence T_1, T_2 sont des points d'où l'on voit le segment ΩP sous un angle droit. Par conséquent, les points T_1, T_2 appartiennent au cercle de diamètre ΩP. Ce cercle est appelé *cercle de Thalès*.



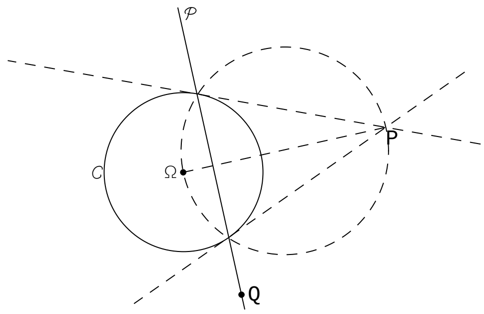
On peut ainsi ramener le problème à l'intersection de deux cercles:
le cercle donné C et le cercle de Thalès de diamètre **ΩP**.



Pratiquement, pour gagner du temps, on utilise l'équation de la polaire de P par rapport à C (voir rubrique suivante).

Polaire d'un point par rapport à un cercle

On donne le cercle C de centre $\Omega(x_0,\ y_0)$ de rayon r ainsi qu'un point $P(x_1,\ y_1)$ extérieur au cercle.
On considère les tangentes au cercle issues de P et on cherche l'équation de la droite $\mathcal{P}$ qui passe par les points de tangence. Cette droite est appelée *polaire du point P par rapport au cercle* C.



Dans le but d'établir l'équation de $\mathcal{P}$, considérons d'abord l'équation du cercle C:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y + x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

L'équation du cercle de Thalès, de diamètre ΩP, est

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = 0 \iff x^2 + y^2 - x_0\,x - x_1\,x - y_0\,y - y_1\,y + x_0\,x_1 + y_0\,y_1 = 0$$

En soustrayant les deux équations, on obtient l'axe radical des deux cercles qui est aussi la polaire du point P par rapport au cercle C :

$$-x_0\,x + x_1\,x - y_0\,y + y_1\,y + x_0^2 + y_0^2 - x_0\,x_1 - y_0\,y_1 = r^2$$

Cette équation équivaut à celle donnée dans les *Formulaires et tables*, donnée ici pour un point courant $Q(x,\ y)$ de la polaire $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega P} \cdot \overrightarrow{\Omega Q} = r^2 \iff (x_1 - x_0)\,(x - x_0) + (y_1 - y_0)\,(y - y_0) = r^2}$$

Résumé

Problème:
étant donné un cercle C et un point extérieur P, déterminer les points de contact $\{T_1,\ T_2\}$ des tangentes à C par P.

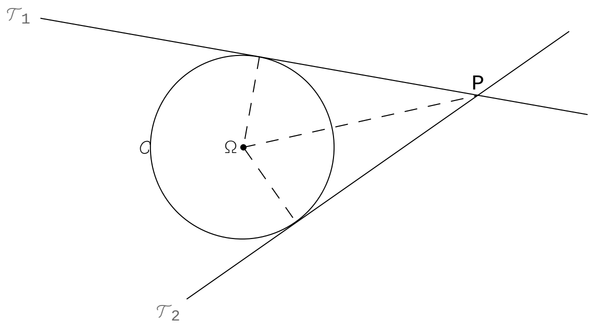
Méthode géométrique:
- tracer le cercle de Thalès (c'est-à-dire le cercle de diamètre ΩP où Ω désigne le centre de C);
- l'intersection des deux cercles donne la solution $\{T_1,\ T_2\}$.

Méthode analytique:

- déterminer l'équation de la polaire de P par rapport à C (voir *Formulaires et tables*);
- l'intersection de C avec la polaire donne la solution $\{T_1,\ T_2\}$.

■ Tangentes par un point extérieur au cercle: équations

On donne le cercle $\mathcal{C}$ de rayon r ainsi qu'un point P extérieur au cercle.
On cherche les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de P (les coordonnées des points de contact ne sont pas demandées).
Il y a deux solutions $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$.



Notons $\Omega(x_0,\ y_0)$ les coordonnées du centre et $P(x_1,\ y_1)$ les coordonnées du point extérieur au cercle.
Considérons la famille des droites de pente m qui passent par P :

$$y = m\,(x - x_1) + y_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{T} : m\,(x - x_1) - y + y_1 = 0$$

Nous cherchons pour quelles pentes m la droite $\mathcal{T}$ se trouve à la distance r du centre Ω

$$\text{dist}\,(\Omega,\ \mathcal{T}) = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{|\,m\,(x_0 - x_1) - y_0 + y_1\,|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

$$|\,m\,(x_0 - x_1) - y_0 + y_1\,| = \pm\, r\,\sqrt{m^2 + 1}$$

On obtient une équation du deuxième degré en m

$$(m\,(x_0 - x_1) - y_0 + y_1)^2 = r^2\,\left(m^2 + 1\right)$$

qui donne généralement deux solutions m_1, m_2. Les réponses sont alors

$$\mathcal{T}_1 : y = m_1\,(x - x_1) + y_1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_2 : y = m_2\,(x - x_1) + y_1$$

Remarque: si le problème admet une solution verticale, la méthode ne fournit que la solution non verticale; il suffit alors de rajouter la solution verticale $x = x_1$.