Calcul numérique de π avec des sommes de Darboux

Liens hypertextes

Techniques d'intégration: par parties, par substitution, par changement de variables
http://www.deleze.name/~marcel//sec2/cours/CalculIntegral/1-TechniquesIntegration.pdf

Exemples d'intégration par changement de variables:
http://www.deleze.name/~marcel//sec2/cours/CalculIntegral/3-ChangementVariable.pdf

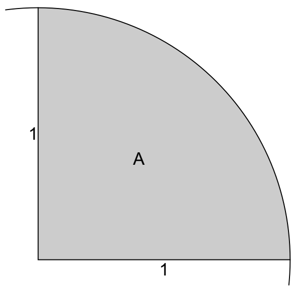
Intégration des fractions rationnelles, décomposition en fractions simples:
http://www.deleze.name/~marcel//sec2/cours/CalculIntegral/4-FractionsSimples.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/~marcel//sec2/cours/index.html

Calcul numérique de π avec des sommes de Darboux

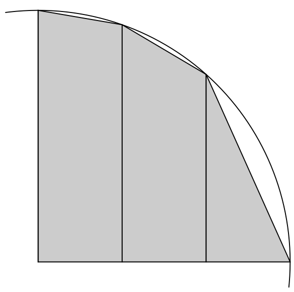
π est égal à quatre fois l'aire du quart de cercle de rayon 1:

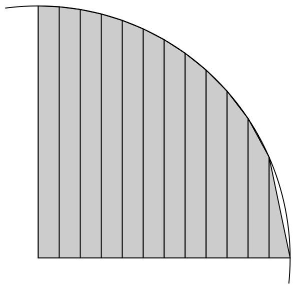
$$A = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \pi = 4\,A$$



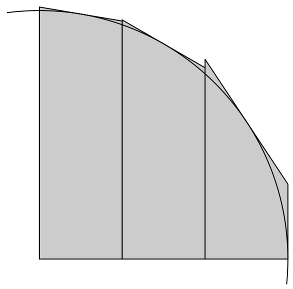
Nous présentons d'abord une méthode qu'on puisse rapidement expliquer, mais qui nécessite l'usage d'un ordinateur.

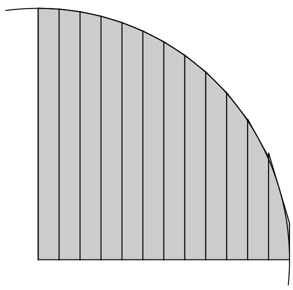
L'aire est encadrée par une valeur inférieure et une valeur supérieure.
La somme inférieure est constituée par les aires de *n* trapèzes (voir figures ci-dessous).



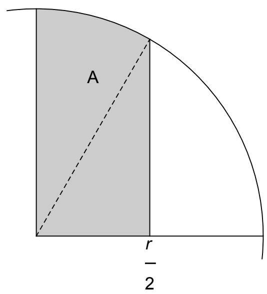


La somme supérieure est constituée par les aires de *n* trapèzes dont le côté supérieur est tangent au cercle, l'abscisse du point de tangence étant située au milieu de l'intervalle partiel (voir figure ci dessous).





On voit que, pour les approximations par défaut et par excès, l'erreur est plus grande sur les trapèzes situés sur la droite. Pour diminuer l'erreur, il vaut mieux organiser les calculs de manière à n'utiliser que les trapèzes situés sur la gauche. Calculons l'aire de la surface grisée ci-dessous:



Elle est constituée d'un secteur circulaire dont l'angle au centre est de 30 ° et d'un triangle rectangle dont l'angle au centre est de 60 °. Son aire est égale à

$$A = \pi r^2 \frac{30°}{360°} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = r^2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\pi = \frac{12\,A}{r^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Choisissons $r = 1$.

Notations et formules

La fonction qui décrit le cercle est

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2};$$

l'intervalle des abscisses est [0; *b*] où

$$b = \frac{1}{2};$$

soit *n* le nombre d'intervalles partiels; la longueur d'un intervalle partiel est

$$h = \frac{b}{n};$$

les extrémités des intervalles partiels sont

$$x_i = i\,h, \qquad i = 0, 1, \ldots, n;$$

les milieux des intervalles partiels sont

$$\xi_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) h, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

La somme inférieure est constituée par les aires de *n* trapèzes

$$\underline{S} = h\,\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\,\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + h\,\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} =$$

$$h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right) =$$

$$\frac{2}{n}\left(\frac{f(0)}{2} + f(h) + f(2\,h) \ldots + f((n-1)\,h) + \frac{f(b)}{2}\right) =$$

$$h\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1 - (i\,h)^2} + \frac{f(b)}{2}\right)$$

L'approximation de π par défaut est donnée par

$$\underline{\pi} = 12\,\underline{S} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

La somme supérieure est constituée par les aires de *n* trapèzes

$$\overline{S} = h\,f(\xi_1) + h\,f(\xi_2) + \ldots + h\,f(\xi_n) = h\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 - \left(\left(i - \frac{1}{2}\right) h\right)^2}\right)$$

L'approximation de π par excès est donnée par

$$\overline{\pi} = 12\,\overline{S} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Calcul avec Mathematica

$$\mathbf{n = 10\text{^}5;\ b = \frac{1}{2};\ h = \frac{b}{n};}$$

$$\mathbf{si = h\left(\frac{f[0]}{2} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} f[i\,h]\right) + \frac{f[b]}{2}\right);}$$

```
ai = N[12 si - 3√3/2]; NumberForm[ai, 16]
```

$$ai = N\left[12\,si - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right];\ \mathrm{NumberForm}[ai, 16]$$

3.141592653575359

$$ss = h \sum_{i=1}^{n} f\left[\left(i - \frac{1}{2}\right) h\right];$$

$$as = N\left[12\,ss - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right];\ \mathrm{NumberForm}[as, 16]$$

3.141592653597011

$$\mathrm{NumberForm}\left[\frac{as - ai}{2}, 16\right]$$

$1.082600675772483 \times 10^{-11}$

$$\mathrm{NumberForm}\left[\frac{ai + as}{2}, 12\right]$$

3.14159265359

Au prix d'un lourd calcul (environ 200 000 extractions de racines carrées), on a finalement obtenu une valeur de π à 12 chiffres significatifs, ce qui montre que la méthode est assez peu efficace.