# Changement de variable

Marcel Délèze

**Liens hypertextes**

Calcul numérique du nombre $\pi$ avec des sommes de Darboux
Techniques d'intégration
Décomposition en fractions simples (intégration des fractions rationnelles)
Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère)
www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

## 3 Exemples

**Exemple 3.1**

$$\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable

$$\begin{aligned}&x=1-t\\&\mathrm{d}x=(-1)\,\mathrm{d}t\\&t=1-x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int (1-t)^2\sqrt{t}(-1)\,\mathrm{d}t = \int \left(-t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c\Big|_{t=1-x}\\ &= -\frac{2}{7}(1-x)^{7/2}+\frac{4}{5}(1-x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}+c=\ldots\end{aligned}$$

**Exemple 3.2**

$$\int \frac{1}{(x-u)^2+k^2}\,\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable

$$\begin{aligned}&x=t+u\\&\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\&t=x-u\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(x-u)^2+k^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2+k^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)+c\Big|_{t=x-u} = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x-u}{k}\right)+c$$

**Exemple 3.3**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable

$$\begin{aligned}&x=\cos(t)\\&\mathrm{d}x=-\sin(t)\,\mathrm{d}t\\&t=\arccos(x)\end{aligned}$$

Pour la bijectivité, nous supposons $-1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq \pi$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}(-\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sin(t)}{|\sin(t)|}\,\mathrm{d}t\\ &= \int -1\,\mathrm{d}t = -t+c\Big|_{t=\arccos(x)} = -\arccos(x)+c\end{aligned}$$

**Exemple 3.4**

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2}\,\mathrm{d}x$$

Rappelons-nous d'abord que $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)+c$. Dans le but de mettre $k^2$ en évidence au dénominateur, effectuons le changement de variable

$$\begin{aligned}&x=kt\\&\mathrm{d}x=k\,\mathrm{d}t\\&x=a \;\leftrightarrow\; t=\tfrac{a}{k}\\&x=b \;\leftrightarrow\; t=\tfrac{b}{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} \frac{1}{(kt)^2+k^2}k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{k}\arctan(t)\Big|_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} = \frac{1}{k}\left(\arctan\left(\frac{b}{k}\right)-\arctan\left(\frac{a}{k}\right)\right)\end{aligned}$$

**Exemple 3.5**

$$\int_a^b \frac{1}{(x-u)^2+k^2}\,\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable

$$\begin{aligned}&x=t+u\\&\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\&x=a \;\leftrightarrow\; t=a-u\\&x=b \;\leftrightarrow\; t=b-u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{(x-u)^2+k^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{a-u}^{b-u} \frac{1}{t^2+k^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)\Big|_{a-u}^{b-u}\\ &= \frac{1}{k}\left(\arctan\left(\frac{b-u}{k}\right)-\arctan\left(\frac{a-u}{k}\right)\right)\end{aligned}$$