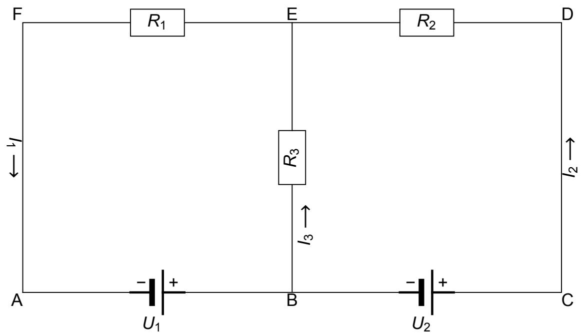
Applications des mathématiques

Systèmes d'équations linéaires

1. Systèmes réguliers (Applications aux circuits électriques)

2. Systèmes singuliers (Formes cartésienne et paramétrique)



Version pour *Mathematica*
Edition 2017
Marcel Délèze
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html

§ 1 Systèmes linéaires réguliers

§ 1.1 Problèmes conduisant à des systèmes d'équations linéaires réguliers

Pour l'instant, il est seulement demandé de poser les systèmes d'équations [sans ordinateur]**.**
La résolution des systèmes sera effectuée plus tard (§ 1-2 et § 1-3).

Exercice 1-1- P 1

Trois frères ont acheté une propriété pour 3 000 000 Fr. Il manque au premier, pour payer à lui seul cette acquisition, la moitié de ce qu'a le deuxième. Celui-ci payerait tout à lui seul s'il avait en plus le tiers de ce qu'a le premier. Enfin le troisième pour faire le paiement entier aurait besoin, en plus de ce qu'il a, du quart de ce que possède le premier. Combien chacun possède-t-il ?

Exercice 1-1- P 2

On a trois lingots.
Le premier contient 20 g d'or, 30 g d'argent et 40 g de cuivre.
Le deuxième contient 30 g d'or, 40 g d'argent et 50 g de cuivre.
Le troisième contient 40 g d'or, 50 g d'argent et 90 g de cuivre.
On demande quel poids il faudra prendre de chacun pour en former
un lingot qui renferme 34 g d'or, 46 g d'argent et 67 g de cuivre.

Exercice 1-1- P 3

On suppose qu'un cycliste a une vitesse de 25 $\frac{km}{h}$ en terrain plat, de 15 $\frac{km}{h}$ en montée et de 30 $\frac{km}{h}$ en descente. Ce cycliste met 4 h 24 min pour parcourir une route AB dans le sens de A vers B et 4 h 36 min pour la parcourir dans le sens de B vers A. La route ayant une longueur de 100 km, on demande de déterminer les longueurs de terrain plat, de montée et de descente de A vers B.

Exercice 1-1- P 4

Déterminez les coefficients du polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

de telle sorte que

$$p(0) = 2,\ p(1) = 5,\ p(-1) = -1,\ p(2) = -3$$

Exercice 1-1- P 5

Déterminez le polynôme du quatrième degré qui passe par les cinq points

$$(0;\ -1),\ (2;\ 3),\ (3;\ 1),\ (4;\ 6),\ (5, -2)$$

Exercice 1-1- P 6

Déterminez les coordonnées du point d'intersection des deux courbes

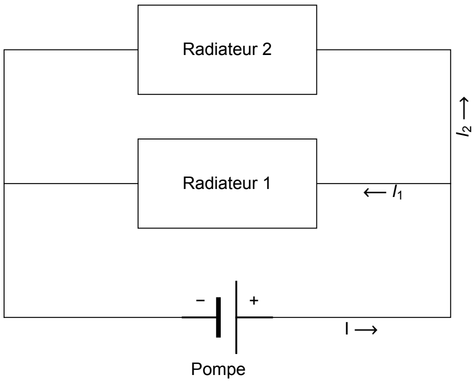
$$y = x^2 - x, \qquad y = \frac{4}{x}$$

Analogie hydraulique

Pour acquérir une première intuition de ce qu'est un circuit électrique, faisons une comparaison. Imaginons une pompe qui actionne un circuit hydraulique dont le liquide tourne en circuit fermé, par exemple, le chauffage central d'un immeuble.
Ses caractéristiques sont

* la pression entre l'entrée et la sortie de la pompe;
* la résistance que le radiateur oppose au passage du liquide (rétrécissement du tuyau);
* le débit du liquide dans la tuyauterie.

Considérons d'abord le cas où deux radiateurs différents sont montés en parallèle (voir figure la figure suivante). Sachant que le débit qui sort de la pompe est $I = 5\,\frac{l}{\text{min}}$ quel est le débit qui entre dans la pompe ?
Sachant que le débit qui sort de la pompe est $I = 5\,\frac{l}{\text{min}}$ et celui qui entre dans le premier radiateur est de $I_1 = 3\,\frac{l}{\text{min}}$, quel est le débit qui entre dans le deuxième radiateur $I_2 =$?



Le débit qui entre dans la pompe est égal à celui qui en sort, sinon la pompe perdrait de l'eau (fuite) ou recevrait un apport d'eau. On a la règle générale:
sur une portion de circuit non ramifiée, le débit est partout le même.

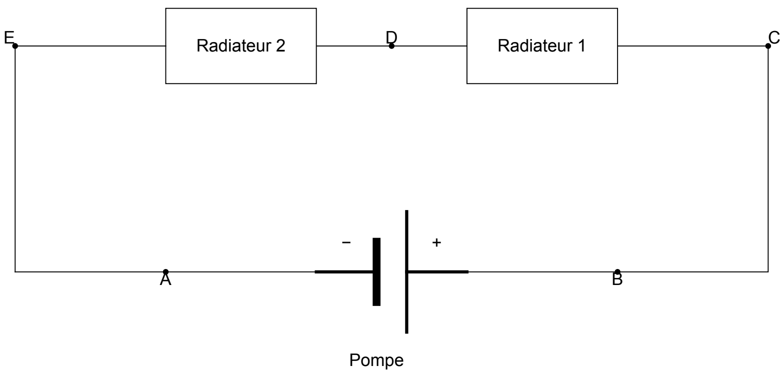
Le débit qui entre dans le deuxième radiateur est de $I_2 = I - I_1 = 2\,\frac{l}{\text{min}}$ sinon le circuit hydraulique perdrait de l'eau (fuite) ou recevrait un apport d'eau. Pour un embranchement (ou une ramification), on a la règle générale
la somme des débits entrants est égale à la somme des débits sortants

$$I = I_1 + I_2$$

Considérons ensuite un circuit sans lequel deux radiateurs différents sont montés en série (voir figure suivante). Nous donnons les différences de pression entre certaines paires de points du circuit, en *hectoPascals*:

$$\Delta p_{AB} = 500\ \text{hPa};\ \Delta p_{BC} = 0\ \text{hPa};\ \Delta p_{CD} = -300\ \text{hPa};\ \Delta p_{EA} = ?\ ;\ \Delta p_{DE} = ?$$

Entre les points *B* et *C*, nous supposons que le tuyau est d'un diamètre suffisant pour que le frottement soit négligeable et que la pression soit intégralement transmise: $p_C = p_B$; par suite $\Delta p_{BC} = p_C - p_B = 0$.



Entre les point E et A, il n'y a qu'une conduite d'eau pour laquelle nous admettons que $\Delta p_{EA} = p_A - p_E = 0$.

Pour déterminer Δp_{DE}, il faut tenir compte que le circuit est fermé. La règle est que, sur une boucle orientée,

la somme des augmentations de pression est égale à somme des chutes de pressions

$$\Delta p_{AB} = \Delta p_{DC} + \Delta p_{ED}$$

$$500\ \text{hPa} = 300\ \text{hPa} + \Delta p_{ED}$$

$$\Delta p_{ED} = 200\ \text{hPa} \qquad \text{et} \qquad \Delta p_{DE} = -200\ \text{hPa}$$

Pour justifier la règle, démontrons que, sur toute boucle orientée fermée, la somme des variations de pression est nulle:

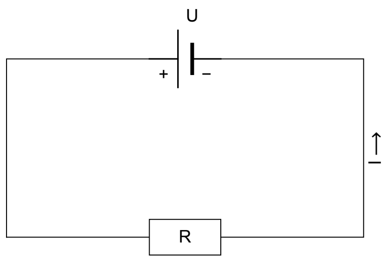
$$\Delta p_{AB} + \Delta p_{BC} + \Delta p_{CD} + \Delta p_{DE} + \Delta p_{EA} = (p_B - p_A) + (p_C - p_B) + (p_D - p_C) + (p_E - p_D) + (p_A - p_E) = 0$$

En passant les chutes de tension dans le membre de droite

$$(p_B - p_A) = (p_B - p_C) + (p_C - p_D) + (p_D - p_E) + (p_E - p_A)$$

$$\Delta p_{AB} = \Delta p_{CB} + \Delta p_{DC} + \Delta p_{ED} + \Delta p_{AE}$$

Circuits électriques à courants continus



La résistance électrique R est exprimée en ohms [Ω].

Une source de courant continu (par exemple, une batterie, une pile, ...) est caractérisée par sa tension électrique U exprimée en volts [V]. La source comprend une borne positive et une borne négative. S'il n'y a qu'une seule source dans le circuit, à l'extérieur de la source, le courant circule de la borne positive vers la borne négative. Dans l'analogie hydraulique, la source de courant peut être comparée à la pompe. La tension électrique entre deux points correspond à la différence de pression. On peut supposer que la résistance interne de la source est nulle. Si la résistance interne n'est pas négligeable, il suffit d'ajouter un élément "résistance" en série avec la source.

Les conducteurs électriques sont des fils (souvent des fils de cuivre) qui conduisent le courant électrique. Dans l'analogie hydraulique, l'intensité du courant électrique correspond au débit du liquide dans le tuyau. Nous supposerons que la résistance des conducteurs est nulle. Lorsque leur résistance n'est pas négligeable, il suffit de rajouter un élément "résistance" sur le conducteur correspondant. L'unité d'intensité de courant I est l'ampère [A].

La loi d'Ohm affirme que, aux bornes d'une résistance R parcourue par un courant I, la chute de tension est donnée par la relation

$$\boxed{U = R \cdot I}$$

En mots: *pour une résistance donnée, la tension aux bornes est proportionnelle à l'intensité du courant qui la traverse*.
Pour les unités, on a

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{A}$$

Première loi de Kirchhoff ou loi des noeuds

Dans chaque portion de circuit non ramifiée - appelée aussi "segment" ou "arc" -, le courant électrique est le même. On introduit autant de variables I_1, I_2, ... qu'il y a de segments. A chaque segment, on attribue un sens de parcours choisi à priori. La valeur du courant sera un nombre positif ou négatif selon que le courant circule dans le sens choisi à priori ou dans le sens contraire.

```
Chaque courant étant affecté d'un sens choisi à priori, à chaque noeud du circuit,
    la somme des courants qui arrivent
        est égale à
    la somme des courants qui en partent.
```

Du point de vue physique, cette loi traduit le fait que, dans un noeud, l'électricité ne peut ni s'accumuler, ni être créée.

Deuxième loi de Kirchhoff ou loi des boucles

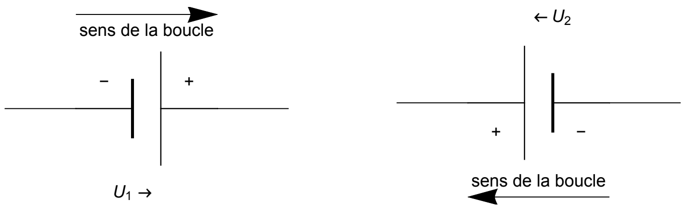
Dans l'analogie hydraulique, en parcourant une boucle (point d'arrivée = point de départ), on retrouve à l'arrivée la même pression qu'au départ. Par conséquent, la somme des augmentations de pression est égale à la somme des diminutions de pression. En électricité, il existe une règle analogue qui concerne les tensions dans une boucle.

```
Dans chaque boucle, un sens de parcours ayant été choisi,
    la somme algébrique des tensions aux bornes des générateurs
        est égale à
    la somme algébrique des chutes de tension sur les résistances.
```

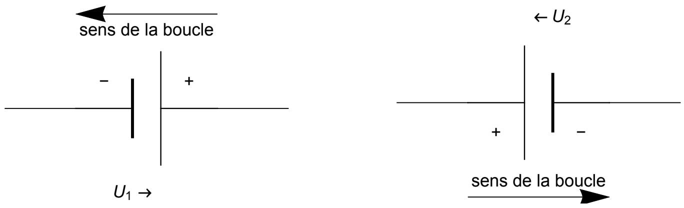
On attribue à chaque maille du circuit un sens de parcours choisi à priori. (Au lieu de "maille", on dit aussi "boucle" ou "circuit").
On compare ensuite le sens de chaque composant (source, résistance) avec le sens de la boucle.
Pour former la somme des tensions des générateurs, on attribue à chaque source une tension aux bornes $\pm U$.
Pour former la somme des chutes de tension, on attribue à chaque résistance une chute de tension $\pm R \cdot I$.
Les signes sont donnés par les règles suivantes :

+ U   lorsque le sens de la source et le sens de parcours de la boucle coïncident :

à l'intérieur de la source, le sens de la source va de la borne négative à la borne positive;
à l'extérieur de la source, le sens de la source va de la borne positive à la borne négative;
le sens de la boucle est choisi arbitrairement pour chaque boucle.

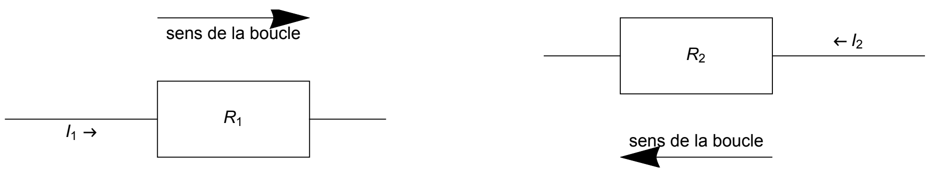


- U lorsque le sens de la source et le sens de la boucle sont opposés :

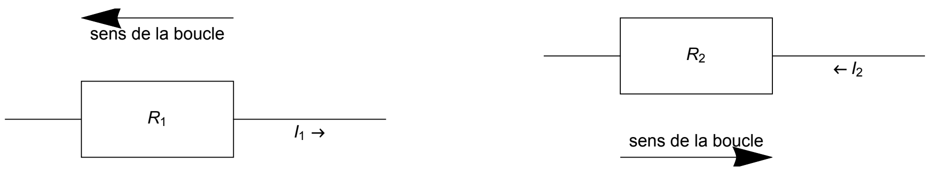


$+R\cdot I$ lorsque le sens du courant et le sens de la boucle coïncident :

le sens du courant a déjà été choisi pour exprimer la loi des noeuds;
le sens de la boucle est choisi arbitrairement pour chaque boucle.



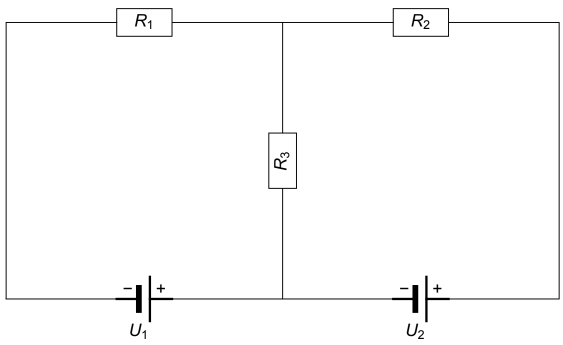
$-R\cdot I$ lorsque le sens du courant et celui de la boucle s'opposent



Du point de vue physique, cette loi traduit le fait que, dans une boucle fermée, la somme des augmentations de tension est égale à la somme des diminutions de tension.

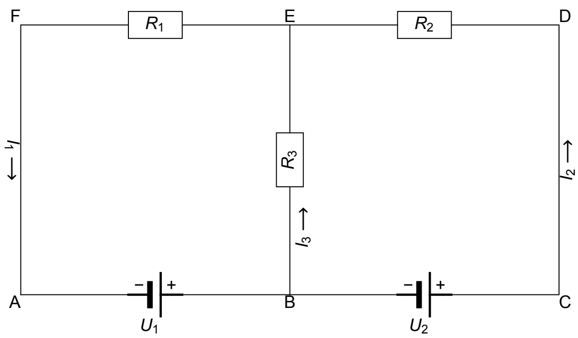
Problème résolu

D'un circuit électrique (voir figure), on donne les tensions aux bornes des sources U_1, U_2 et les valeurs des résistances R_1, R_2, R_3.



On demande de calculer tous les courants.
Pour ce faire, appliquons d'abord la première loi de Kirchhoff:

Dans ce circuit, il y a trois segments : EFAB, BCDE et BE. Dans chacun d'entre eux circule un courant inconnu, dénommé I_1, I_2, I_3 respectivement. A chaque courant, on attribue arbitrairement un sens (voir les flèches dans la figure ci-dessous).



Ce circuit comporte deux noeuds : E et B.
La première loi de Kirchhoff, pour le noeud E, donne l'équation

$$I_2 + I_3 = I_1$$

La première loi de Kirchhoff, pour le noeud B, donne l'équation

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Appliquons maintenant la deuxième loi de Kirchhoff.
Le circuit admet trois boucles fermées; ce sont ABEFA, BCDEB et ACDFA.
Orientons chacune de ces trois boucles dans le sens (mathématique) direct
(c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles de la montre).
Pour la boucle ABEFA, la deuxième loi de Kirchhoff donne

$$U_1 = R_3 I_3 + R_1 I_1$$

Pour la boucle BCDEB, la deuxième loi de Kirchhoff donne

$$U_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3$$

Pour la boucle ACDFA, la deuxième loi de Kirchhoff donne

$$U_1 + U_2 = R_2 I_2 + R_1 I_1$$

Les lois de Kirchhoff nous ont donné cinq équations desquelles il nous faut éliminer deux équations redondantes : remarquons que

la deuxième équation équivaut à la première;
la cinquième équation est la somme des deux équations qui la précèdent.

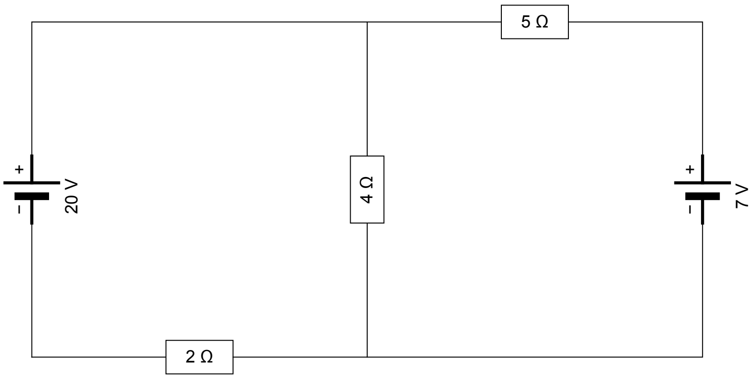
Finalement, nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= I_1 \\ U_1 &= R_3\, I_3 + R_1\, I_1 \\ U_2 &= R_2\, I_2 - R_3\, I_3 \end{aligned}$$

La résolution du système d'équations donnera les valeurs des courants (voir § 1-2 et § 1-3).

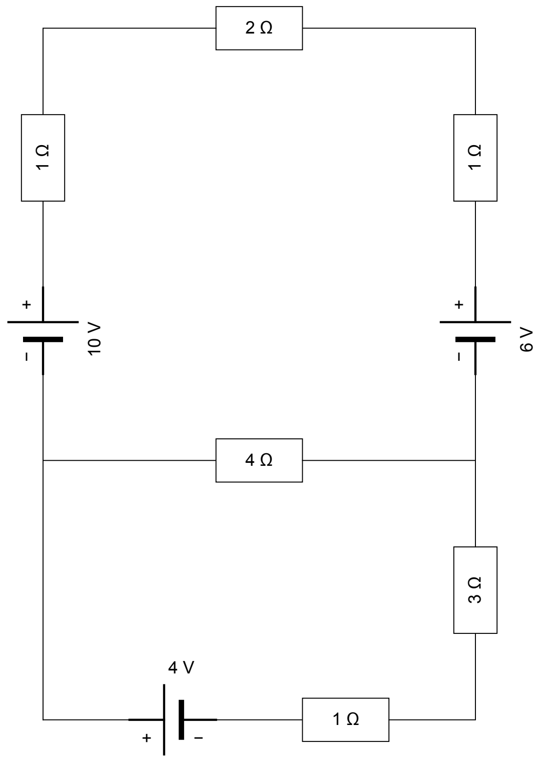
Exercice 1-1- P 7

Calculez tous les courants du circuit suivant (Monard, ex. 12 - 5 d)

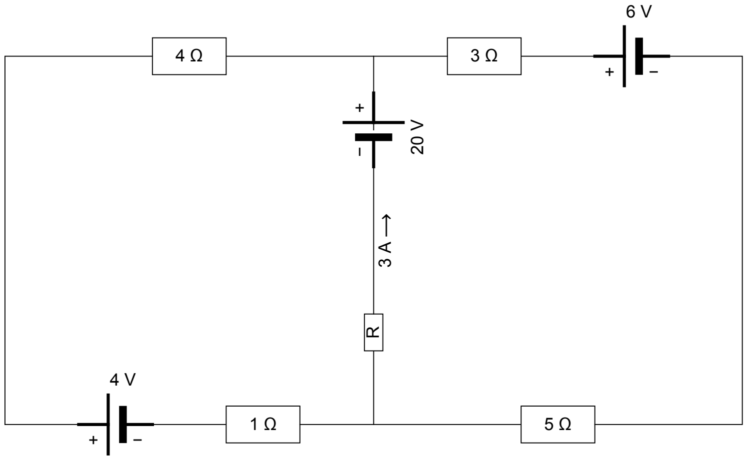


Exercice 1-1- P 8

Calculez tous les courants du circuit suivant (Monard ex. 12 - 5 b)



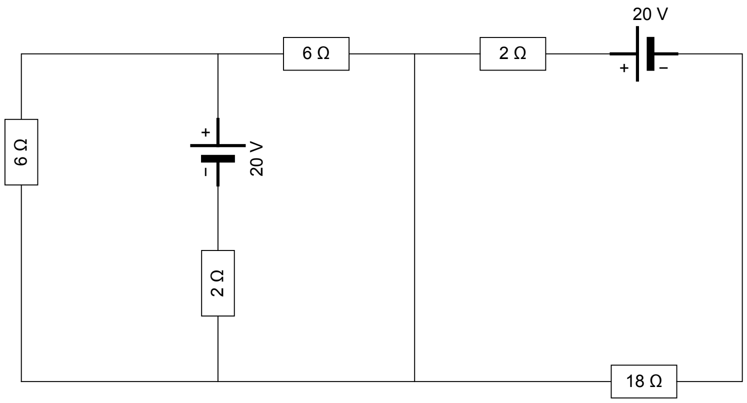
Exercice 1-1- P 9



Calculez la résistance R afin qu'elle soit traversée par un courant de 3 A dans le sens indiqué dans la figure.

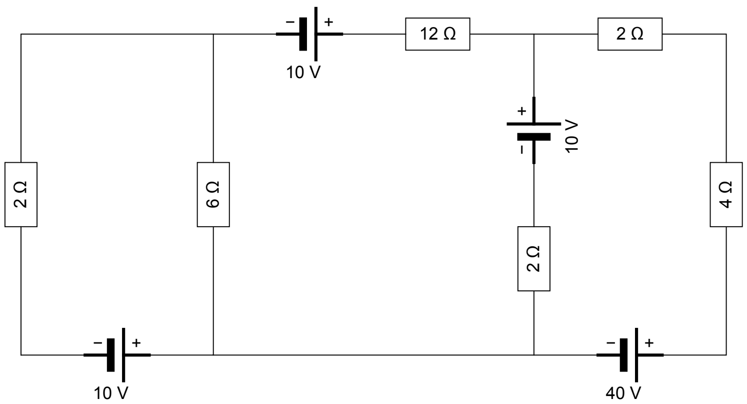
Exercice 1-1- P 10

Calculez tous les courants du circuit suivant (Monard ex. 12 - 5 c)



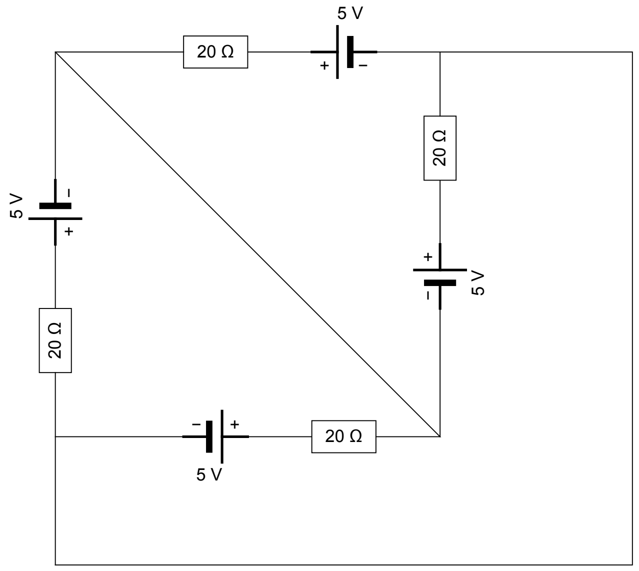
Exercice 1-1- P 11

Calculez tous les courants du circuit suivant (Monard, ex. 12 - 6 a)



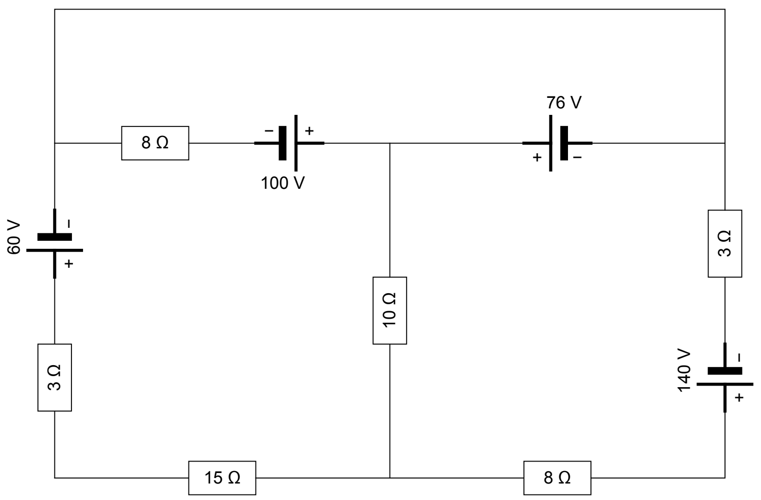
Exercice 1-1- P 12

Calculez tous les courants du circuit suivant (Monard, ex. 12 - 5 a)



Exercice 1-1- P 13

Calculez tous les courants du circuit suivant (Monard, ex. 12 - 6 f)



§ 1.2 Réduction à la forme triangulaire

Equations linaires

Dans une équation linéaire, les inconnues *x, y, z, ...* apparaissent uniquement sous la forme

$$a\,x + b\,y + c\,z + \ldots = k$$

où *a, b, c,* ... et *k* sont des constantes réelles. Par exemple,

$$\sqrt{2}\,x - \frac{3}{2}\,y = 56$$

est une équation linéaire alors que chacune des équations suivantes

$$x - y^2 = 3$$
$$x - \frac{1}{y} = 1$$
$$3\,x - \sqrt{y} = 8$$

n'est pas linéaire.

Les méthodes exposées dans ce chapitre ne concernent que les équations linéaires.

Forme générale

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on commence par arranger les termes de la manière suivante:

- tous les termes contenant les inconnues sont mis dans le membre de gauche;
- les autres termes sont mis dans le membre de droite;
- les termes semblables sont réduits (par exemple, $5\,y - 2\,y = 3\,y$);
- les termes inconnus sont mis dans le même ordre pour toutes les équations;
- le système d'équations est présenté en colonnes :
  - la première colonne pour la première inconnue,
  - la deuxième colonne pour la deuxième inconnue,
  - etc.

Par exemple,

$$\begin{array}{rrrcr} -2\,x & -5\,y & +z & = & -1 \\ x & +5\,y & -4\,z & = & 2 \\ 2\,x & -3\,y & +4\,z & = & 7 \end{array}$$

Plus généralement, pour un système de n équations à n inconnues x_1, x_2, x_3, ..., x_n, le système d'équations prend la forme suivante:

$$\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1\,n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2\,n}\,x_n = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \ldots + a_{3\,n}\,x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n\,1}\,x_1 + a_{n\,2}\,x_2 + a_{n\,3}\,x_3 + \ldots + a_{n\,n}\,x_n = b_n \end{array}$$

Forme triangulaire

Les systèmes triangulaires sont des systèmes d'équations particulièrement faciles à résoudre. Voici un exemple :

$$\begin{array}{rrrcr} \boxed{-2x} & -5y & +z & = & -1 \\ & \boxed{5y} & -7z & = & 3 \\ & & \boxed{-31z} & = & 54 \end{array}$$

Les termes encadrés sont appelés "termes diagonaux" .
Ce système est dit "triangulaire supérieur" parce que tous les termes situés au-dessous de la diagonale sont nuls.

La résolution des systèmes triangulaires est aisée car le système d'équations est explicite:

$$z = -\frac{54}{31}$$
$$y = \frac{1}{5}(3+7z) = -\frac{57}{31}$$
$$x = -\frac{1}{2}(-1+5y-z) = \frac{131}{31}$$

Plus généralement, un système de n équations à n inconnues est triangulaire supérieur si tous les termes situés au-dessous de la diagonale sont nuls :

$$\begin{array}{cccccccc} \boxed{a_{11}\,x_1} & +a_{12}\,x_2 & +a_{13}\,x_3 & +\;\ldots & +a_{1\,n}\,x_n & = & b_1 \\ & \boxed{a_{22}\,x_2} & +a_{23}\,x_3 & +\;\ldots & +a_{2\,n}\,x_n & = & b_2 \\ & & \boxed{a_{33}\,x_3} & +\;\ldots & +a_{3\,n}\,x_n & = & b_3 \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \boxed{a_{n\,n}\,x_n} & = & b_n \end{array}$$

Réduction à la forme triangulaire ou méthode de Gauss

Par exemple, soit à résoudre le système

$$\begin{array}{rrrcr} -2x & -5y & +z & = & -1 \\ x & +5y & -4z & = & 2 \\ 2x & -3y & +4z & = & 7 \end{array}$$

Le but est de transformer ce système en un système triangulaire équivalent. (Un système <u>équivalent</u> est un système possédant le même ensemble des solutions.)

On va procéder par étapes, selon le plan suivant:

- la première étape va consister à placer les zéros dans la première colonne, c'est-à-dire à "faire disparaître" les deux termes situé au-dessous de la diagonale;
- la deuxième étape va consister à placer les zéros dans la deuxième colonne, c'est-à-dire à "faire disparaître" le(s) terme(s) situé(s) au-dessous de la diagonale;
- le nombre d'étapes est égal au nombre d'inconnues moins un.

La méthode est aussi appelée <u>méthode de Gauss</u>. Comme la réduction à la forme triangulaire jouera un rôle important dans le prochain paragraphe (§ 2 Systèmes singuliers), il vous est expressément demandé d'utiliser systématiquement cette méthode dès maintenant.

Étape 1 A : choix du pivot dans la première colonne

$$\begin{array}{rrrcr} \boxed{-2x} & -5y & +z & = & -1 \\ x & +5y & -4z & = & 2 \\ 2x & -3y & +4z & = & 7 \end{array}$$

Dans la première colonne, le terme diagonal est situé sur la première ligne.
Il faut faire en sorte que le terme diagonal ne soit pas nul. Si nécessaire, on permute la première ligne avec une des lignes suivantes. Après quoi le terme diagonal non nul est appelé "premier pivot".

Étape 1 B : élimination dans la première colonne

$$\left.\begin{array}{rrrcr} -2x & -5y & +z & = & -1 \\ \boxed{x} & +5y & -4z & = & 2 \\ \boxed{2x} & -3y & +4z & = & 7 \end{array}\right| \begin{array}{c|c|} 1 & 1 \\ \longleftarrow 2 & \\ & \longleftarrow 1 \end{array}$$

Pour éliminer le terme subdiagonal $\boxed{x}$, on multiplie la première ligne par 1, la deuxième ligne par 2, puis la combinaison des deux lignes remplace la deuxième ligne;
pour éliminer le terme subdiagonal $\boxed{2x}$, on multiplie la première ligne par 1, la troisième ligne par 1, puis la combinaison des deux lignes remplace la troisième ligne.

$$\begin{array}{rrrcr} -2x & -5y & +z & = & -1 \\ & +5y & -7z & = & 3 \\ & -8y & +5z & = & 6 \end{array}$$

Étape 2 A : choix du pivot dans la deuxième colonne

$$\begin{array}{rrrcr} -2x & -5y & +z & = & -1 \\ & \boxed{+5y} & -7z & = & 3 \\ & -8y & +5z & = & 6 \end{array}$$

Dans la deuxième colonne, le terme diagonal est situé sur la deuxième ligne.
Il faut faire en sorte que le terme diagonal ne soit pas nul. Si nécessaire, on permute la deuxième ligne avec une des lignes suivantes. Après quoi le terme diagonal non nul est appelé "deuxième pivot".

Étape 2 B : élimination dans la deuxième colonne

$$\left.\begin{array}{rrrcr} -2x & -5y & +z & = & -1 \\ & 5y & -7z & = & 3 \\ & \boxed{-8y} & +5z & = & 6 \end{array}\right| \begin{array}{c|} \\ 8 \\ \longleftarrow 5 \end{array}$$

Pour éliminer le terme subdiagonal $\boxed{-8y}$, on multiplie la deuxième ligne par 8, la troisième ligne par 5, puis la combinaison des deux lignes remplace la troisième ligne.

$$\begin{array}{rrrcr} -2x & -5y & +z & = & -1 \\ & 5y & -7z & = & 3 \\ & & -31z & = & 54 \end{array}$$

Le système obtenu est triangulaire.

Remarquez que, durant la deuxième étape, on n'utilise jamais la première ligne dans les combinaisons linéaires. Pourquoi ?

Systèmes réguliers

Définition

Un système d'équations linéaires est régulier si et seulement si

1°) le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et

2°) le système possède une et une seule solution.

Proposition

Un système d'équations linéaires est régulier si et seulement si

1°) le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et

2°) il est possible de réduire le système à la forme triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls (pivots).

Exemple

Le système linéaire de l'exemple donné ci-dessus est régulier.

Le § 1 est consacré aux systèmes réguliers.

Contre-exemple

Le système linéaire suivant est triangulaire supérieur mais le troisième terme diagonal est nul.

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1 \\ & y & -z & =-2 \\ & & 0z & =0 \end{array}$$

Un système qui n'est pas régulier est appelé singulier.

Un système singulier possède

soit une infinité de solutions

soit aucune solution.

Le § 2 sera consacré aux systèmes singuliers.

Exercice 1-2- P 1

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 1. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 2

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 2. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Indication

Après avoir résolu le système, n'oubliez pas de vérifier les inéquations.

Si la solution du système d'équations ne satisfait pas le système d'inéquations, alors le problème ne possède pas de solution.

Exercice 1-2- P 3 (facultatif)

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 3. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 4 (facultatif)

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 4. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 5

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 5. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

> Indications
> Puisque a_0 est connu, décidons d'écrire un système de quatre équations à quatre inconnues.
> Pour éliminer dans la 1-ère colonne, on combine les lignes 1 et 2, puis les lignes 1 et 3, puis les lignes 1 et 4.
> Pour éliminer dans la deuxième colonne, on combine les lignes 2 et 3, puis les lignes 2 et 4.
> Pour éliminer dans la troisième colonne, on combine les lignes 3 et 4.

Exercice 1-2- P 6

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 6. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 7 (facultatif)

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 7. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 8 (facultatif)

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 8. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 9 (facultatif)

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 9. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 10

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 10. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

> Indications
> Lorsque de nombreux coefficients sont nuls, on dit que le système d'équations est creux (en anglais : "sparse"). Dans un tels cas, non seulement on est amené à permuter les lignes mais il est avantageux de permuter aussi les colonnes pour se rapprocher de la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 11

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 11. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 12

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 12. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

Exercice 1-2- P 13 (facultatif)

Résolvez "à la main" le système d'équations obtenu dans l'exercice 1-1- P 13. Si le système est linéaire, utilisez la méthode de la réduction à la forme triangulaire.

§ 1.3 Résolution avec Mathematica

Méthodes Solve[...], NSolve[...] et Reduce[...]

Exemple 1 : un système régulier 2 × 2

Pour un système régulier tel que

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ -x + 3y &= -5 \end{aligned}$$

la méthode Solve[...] donne la solution du système sous la forme d'une liste de substitutions

```
Solve[{2 x + y == 3, -x + 3 y == -5}, {x, y}]
```
résous

```
{{x → 2, y → -1}}
```

Observez la syntaxe :

le symbole = désigne une assignation; c'est == qui désigne une équation;
un système d'équations est une liste d'équations;
le deuxième argument de Solve est la liste des inconnues.

La méthode Reduce[...] donne la solution sous la forme d'un système d'équations cartésiennes

```
Reduce[{2 x + y == 3, -x + 3 y == -5}, {x, y}, Reals]
```
réduis nombres

```
x == 2 && y == -1
```

Exemple 2 : un système singulier 2 × 2

Considérons maintenant un système possédant une infinité de solutions

```
Solve[{9 x + 6 y == 3, -6 x - 4 y == -2}, {x, y}]
```
résous

... Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{2} - \frac{3x}{2}\right\}\right\}$$

Une interprétation consiste à dire que le système se réduit en fait à une seule équation cartésienne

$$x = \frac{1}{3} - \frac{2y}{3}$$

Dans un tel cas, on peut souhaiter écrire l'ensemble des solutions sous forme paramétrique :
pour chaque valeur du paramètre t, on a une solution (x, y) donnée par

$$x = \frac{1}{3} - \frac{2t}{3}$$
$$y = t$$

La méthode Reduce[...] donne la solution sous la forme d'un système d'équations cartésiennes

```
Reduce[9 x + 6 y == 3 ∧ -6 x - 4 y == -2, {x, y}, Reals]
```
réduis nombres

$$y == \frac{1}{2} - \frac{3x}{2}$$

qui est un système cartésien que l'on peut récrire sous la forme paramétrique

$$x = t$$
$$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} t$$

Comme on a résolu le même système d'équations avec **Solve** et **Reduce**, on remarquera que l'ensemble des solutions peut s'exprimer sous des formes paramétriques différentes.

Méthodes LinearSolve[...] et NullSpace[...]

LinearSolve[...] et NullSpace[...] sont des méthodes plus spécifiques, destinées à résoudre n'importe quel système linéaire régulier ou singulier. Il ne sera plus nécessaire de donner un nom à chaque inconnue, mais le système d'équations devra être donné sous la forme matricielle.
Ces méthodes permettent aussi, le cas échéant, d'écrire l'ensemble des solutions sous forme paramétrique. Dans ce chapitre, nous donnons la préférence à cette représentation.

Exemple 1 : un système régulier 2 × 2

Pour un système régulier tel que

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ -x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

la matrice du membre de gauche de l'équation est la liste des coefficients des inconnues

```
m = {{2, 1}, {-1, 3}}
```

```
{{2, 1}, {-1, 3}}
```

qu'on peut afficher sous la forme d'un tableau

```
MatrixForm[m]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le membre de droite de l'équation est le vecteur

```
b = {3, -1}
```

```
{3, -1}
```

qu'on peut aussi afficher sous la forme matricielle

```
MatrixForm[b]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La méthode LinearSolve[...] donne une solution du système :

```
LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

$$\left\{\frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right\}$$

La méthode LinearSolve[...] ne nous indique pas si d'autres solutions existent. Pour le savoir, on utilise la méthode NullSpace[...]

```
NullSpace[m]
```
espace nul

```
{}
```

Ce résultat signifie que le système possède au plus une solution.

La forme matricielle nous a dispensé de donner un nom aux inconnues. Les calculs sont exécutés sur des tableaux de nombres : la première colonne contient les coefficients de la première inconnue, la deuxième colonne contient les coefficients de la deuxième inconnue, etc.

On peut utiliser le nom des inconnues pour recueillir le résultat:

```
{x, y} = LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

$$\left\{\frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right\}$$

En mathématiques, on peut écrire le système d'équations sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : un système singulier 2 × 2

L'intérêt porté aux méthodes LinearSolve[...] et NullSpace[...] se justifie particulièrement par leur aptitude à traiter des systèmes singuliers. Considérons le système

$$\begin{aligned} 9x + 6y &= 3 \\ -6x - 4y &= -2 \end{aligned}$$

En mathématiques, on peut écrire le système d'équations sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pour le calcul avec *Mathematica*, mettons le système sous la forme matricielle

```
m = {{9, 6}, {-6, -4}}; b = {3, -2};
```

```
LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

$$\left\{\frac{1}{3}, 0\right\}$$

La méthode LinearSolve[...] nous a donné une solution. Pour savoir s'il en existe d'autres, utilisons NullSpace[...]

```
NullSpace[m]
```
espace nul

```
{{-2, 3}}
```

On en donne l'interprétation suivante:

l'ensemble des solutions de l'équation est représentée par une droite;
LinearSolve nous donne un point de cette droite;
NullSpace nous donne un vecteur directeur de cette droite;
l'ensemble des solutions est, sous forme paramétrique,

```
{x, y} = {1/3, 0} + t * {-2, 3}
```

$\left\{\frac{1}{3} - 2\,t,\ 3\,t\right\}$

NullSpace nous a donné <u>une base du noyau</u>. Cette notion sera expliquée plus tard, dans le § 2. On remarquera déjà que la résolution des systèmes d'équations linéaires est un sujet en relation avec la géométrie analytique : droites, plans, sous-espaces, ...

Exemple 3 : un système singulier 2 × 2

Considérons le système

$$\begin{aligned} 9\,x + 6\,y &= 1 \\ -6\,x - 4\,y &= -1 \end{aligned}$$

En mathématiques, on peut écrire le système d'équations sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour le calcul avec *Mathematica*, mettons le système sous la forme matricielle

```
m = {{9, 6}, {-6, -4}}; b = {1, -1};
```

```
LinearSolve[m, b]
```

résous équation linéaire

LinearSolve: Linear equation encountered that has no solution.

```
LinearSolve[{{9, 6}, {-6, -4}}, {1, -1}]
```

La méthode LinearSolve[...] nous informe lorsqu'un système linéaire n'a pas de solution.

Exemple 4 : un système régulier 3 × 3

Soit à résoudre le système

$$\begin{aligned} -a_2 + 3\,a_3 &= 7 \\ 5\,a_1 - 6\,a_2 \quad &= -2 \\ 3\,a_1 + a_2 - a_3 &= 10 \end{aligned}$$

En mathématiques, on peut écrire le système d'équations sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Pour le calcul avec *Mathematica*, écrivons la matrice du système. Pour entrer une matrice, actionnez le bouton droit de la souris puis

Créer Tableau / Matrice / Palette
Sélectionner Matrice
Entrez Nombre de lignes, Nombre de colonnes
OK
Donnez un nom à la matrice m=
Entrez les coefficients

$$m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
{{0, -1, 3}, {5, -6, 0}, {3, 1, -1}}
```

```
b = {7, -2, 10}
```
{7, -2, 10}

```
a = LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

$$\left\{\frac{109}{32}, \frac{203}{64}, \frac{217}{64}\right\}$$

Le résultat précédent nous indique que le système possède au moins une solution.

```
NullSpace[m]
```
espace nul

{}

Le résultat précédent nous indique que le système possède au plus une solution.
Finalement. le système possède 1 et une seule solution qui est

```
a
```

$$\left\{\frac{109}{32}, \frac{203}{64}, \frac{217}{64}\right\}$$

La fonction MatrixForm[...] n'a rien à voir avec le calcul. Elle ne concerne que l'affichage : on peut demander à *Mathematica* d'écrire une matrice sous la forme d'un tableau pour en faciliter la lecture :

```
MatrixForm[m]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[b]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[a]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{109}{32} \\ \frac{203}{64} \\ \frac{217}{64} \end{pmatrix}$$

Exercice 1-3- P 1

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 1.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice 1-2- P 1.

Exercice 1-3- P 2

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 2.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice 1-2- P 2.

Exercice 1-3- P 3 (facultatif)

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 3.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice facultatif 1-2- P 3.

Exercice 1-3- P 4 (facultatif)

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 4.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice facultatif 1-2- P 4.

Exercice 1-3- P 5

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 5.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice 1-2- P 5.

Exercice 1-3- P 6

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 6.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice 1-2- P 6.

Exercice 1-3- P 7 (facultatif)

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 7.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice facultatif 1-2- P 7.

Exercice 1-3- P 8 (facultatif)

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 8.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice facultatif 1-2- P 8.

Exercice 1-3- P 9 (facultatif)

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 9.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice facultatif 1-2- P 9.

Exercice 1-3- P 10

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 10.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice 1-2- P 10.

Exercice 1-3- P 11

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 11.
Vérifiez que le système est régulier.

Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice 1-2- P 11.

Exercice 1-3- P 12

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 12.
Vérifiez que le système est régulier.
Vérifiez que la réponse coïncide avec celle de l'exercice 1-2- P 12.

Exercice 1-3- P 13

Avec Mathematica, résolvez le système d'équations de l'exercice 1-1- P 13.
Vérifiez que le système est régulier.

Lien vers les corrigés des exercices

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/systemes_lineaires/1-syslin-cor.pdf