Marcel Délèze
Edition 2017

§ 2 Dérivées partielles

Définition de la dérivée partielle

La dérivée partielle de la fonction f par rapport à x en (x, y) est la dérivée de la fonction d'une seule variable réelle

$$x \mapsto f(x, y) \qquad \text{où} \qquad y \text{ est constant}$$

Elle est notée

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad \text{ou} \quad \partial_x f(x, y)$$

En d'autres termes

$$\boxed{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}$$

Dans le cas où la limite n'existe pas, on dit que *la fonction f n'est pas partiellement dérivable par rapport à x en (x, y)*.

Dans le contexte des fonctions de plusieurs variables, l'adjectif partiel signifie par rapport à une seule variable, les autres arguments étant constants.

D'une manière analogue, *la dérivée partielle de la fonction f par rapport à y en (x, y)* est la dérivée de la fonction d'une seule variable réelle

$$y \mapsto f(x, y) \qquad \text{où} \qquad x \text{ est constant}$$

Elle est notée

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad \text{ou} \quad \partial_y f(x, y)$$

En d'autres termes

$$\boxed{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

Dans le cas où la limite n'existe pas, on dit que *la fonction f n'est pas partiellement dérivable par rapport à y en (x, y)*.

La définition s'étend naturellement aux fonctions de trois variables ou plus. Ainsi, l*a dérivée partielle de la fonction f par rapport à z en (x, y, z)* est la dérivée de la fonction d'une seule variable réelle

$$z \mapsto f(x, y, z) \qquad \text{où} \qquad x \text{ et } y \text{ sont constants}$$

Elle est notée

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \partial_z f(x, y, z)$$

En d'autres termes

$$\boxed{\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}}$$

Exemples (calculs à la main)

Soit $f(x,\ y) = \frac{x^2}{y}$. Alors,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = \frac{1}{y}(2\,x) = \frac{2\,x}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y}\right) = x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-1}\right) = x^2\,(-1)\;y^{-2} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Soit $V(r,\ h) = \pi\, r^2\, h$. Alors,

$$\frac{\partial V\,(r,\ h)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\pi\, r^2\, h\right) = \pi\, h\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right) = \pi\, h\,(2\, r) = 2\,\pi\, r\, h$$

$$\frac{\partial V\,(r,\ h)}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\pi\, r^2\, h\right) = \pi\, r^2\,\frac{\partial}{\partial h}(h) = \pi\, r^2\, 1 = \pi\, r^2$$

$$\frac{\partial V\,(0.4;\ 0.6)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\pi\, r^2\, h\right)\,|_{(0.4,0.6)} = 2\,\pi\, r\, h\,|_{(0.4,\,0.6)} = 2\,\pi\, 0.4\times 0.6 = 0.48\,\pi$$

$$\frac{\partial V\,(0.4;\ 0.6)}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\pi\, r^2\, h\right)\,|_{(0.4,\,0.6)} = \pi\, r^2\,|_{(0.4,\,0.6)} = \pi\, 0.4^2 = 0.16\,\pi$$

Dérivée et ordre des opérations

Par exemple, pour calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ en $x = 3$, il faut

d'abord calculer la fonction dérivée $f'(x) = 2\,x$

puis ensuite remplacer par la valeur $f'(3) = 2 * 3 = 6$

Si on inverse l'ordre des opérations, le résultat est toujours nul:

remplacer d'abord par la valeur $f(3) = 3^2 = 9$ [ce qui donne une constante]

puis calculer ensuite la dérivée $(9)' = 0$ [la dérivée d'une fonction constante est nulle].

C'est pourquoi, en *Mathematica*, le calcul qui suit donne un résultat aberrant

```
Clear[f];
efface
f[x_] := x^2;
```

```
∂x f[3]
```

0

Une méthode correcte est la suivante (la substitution est effectuée à la fin)

```
∂x f[x] /. x → 3
```

6

Exemples (calculs avec Mathematica)

$\partial_x\left(\frac{x^2}{y}\right)$

$\frac{2\,x}{y}$

$\partial_y \left(\frac{x^2}{y}\right)$

$-\frac{x^2}{y^2}$

$\partial_r \left(\pi\, r^2\, h\right)$

$2\, h\, \pi\, r$

$\partial_h \left(\pi\, r^2\, h\right)$

$\pi\, r^2$

$\partial_r \left(\pi\, r^2\, h\right)$ /. {r → 0.4, h → 0.6}

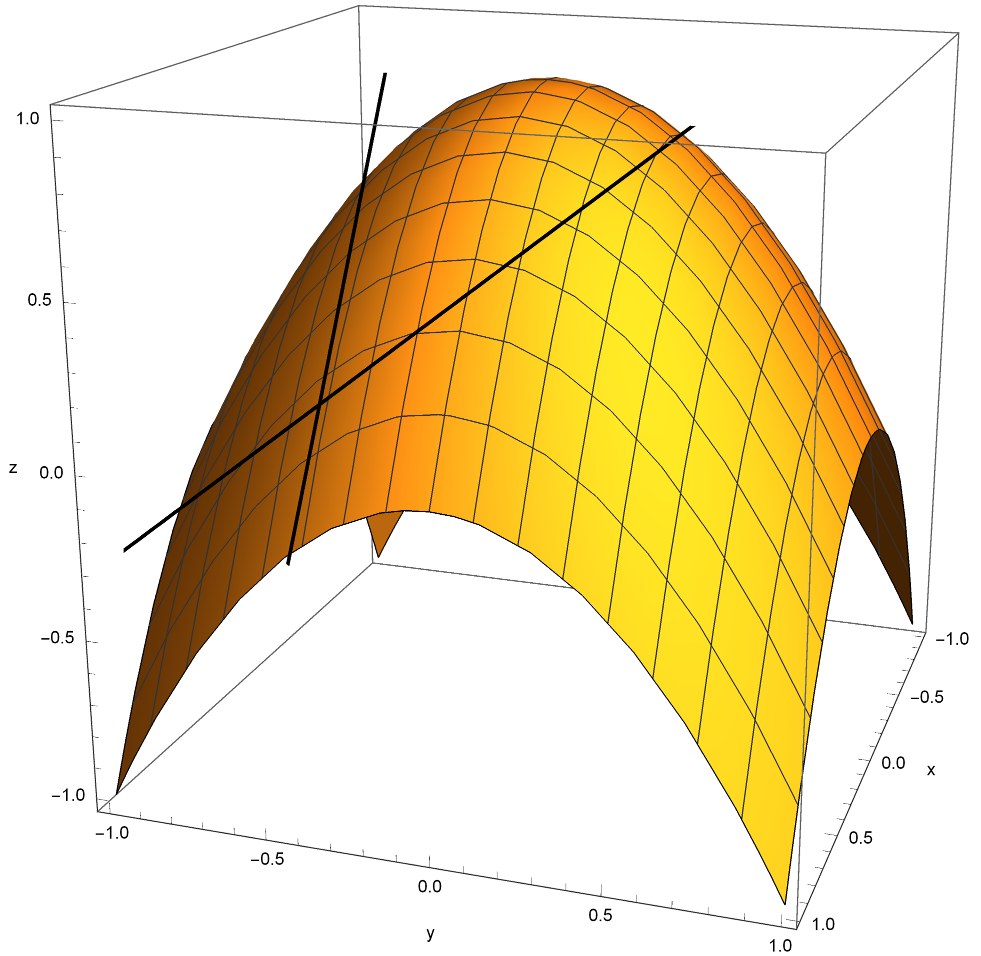
1.50796

$\partial_h \left(\pi\, r^2\, h\right)$ /. {r → 0.4, h → 0.6}

0.502655

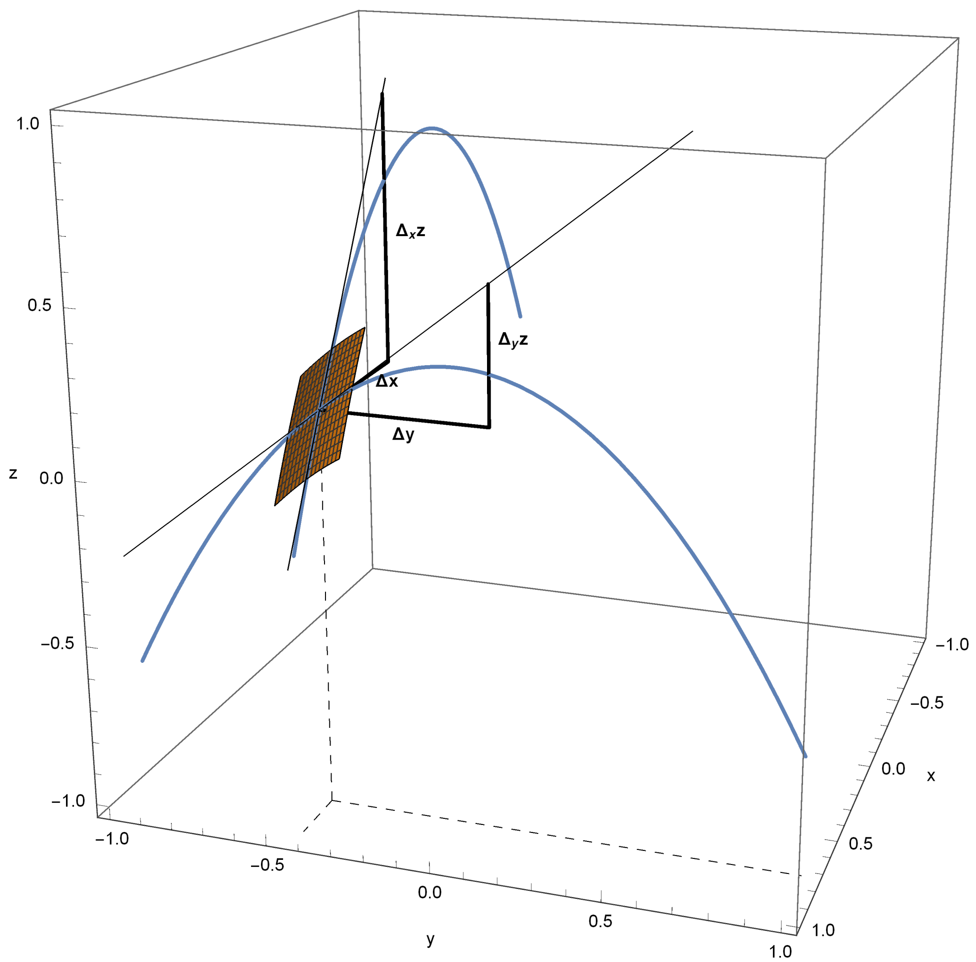
Interprétation géométrique

Illustrons la notion de dérivée partielle sur la fonction $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Au point $(x,\ y) = (0.8,\ -0.4)$, traçons les deux droites tangentes à la surface, la première dans le plan vertical parallèle au plan $(x,\ z)$, la deuxième dans le plan vertical parallèle au plan $(y,\ z)$.



La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ représente la *pente de la droite* qui est tangente à la surface au point $(x, y, f(x, y))$ dans le plan vertical (x, z). Dans la figure suivante, il s'agit du nombre $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ représente la *pente de la droite* qui est tangente à la surface au point $(x, y, f(x, y))$ dans le plan vertical (y, z). Dans la figure suivante, il s'agit du nombre $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.



Exercices du § 2

Exercice 2-1 Calculs à la plume

Pour $E = \frac{1}{2} m v^2$, en $(m, v) = \left(2\ \mathrm{kg},\ 5\ \frac{m}{s}\right)$, calculez à la main les *dérivées partielles* $\frac{\partial E}{\partial m}$ et $\frac{\partial E}{\partial v}$.

Exercice 2-2 Interprétations géométriques

a) Avec *Mathematica*, dessinez la fonction $I = \frac{U}{R}$ sur le domaine [5 V, 15 V] × [500 Ω, 1500 Ω] puis imprimez le graphique.

b) Calculez à la main $\frac{\partial I(U, R)}{\partial U}$ et $\frac{\partial I(U, R)}{\partial R}$ en $(U, R) = (10\ V, 1000\ \Omega)$.

c) Expliquez et dessinez sur le graphique de I ce que représentent $\frac{\partial I(10\ V, 1000\ \Omega)}{\partial U}$ et $\frac{\partial I(10\ V, 1000\ \Omega)}{\partial R}$.

Exercice 2-3 Calculs avec Mathematica

Pour $v = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}$, en $(x, y, t) = (3\ m, 2\ m, 5\ s)$, calculez avec *Mathematica* les *dérivées partielles* $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$.

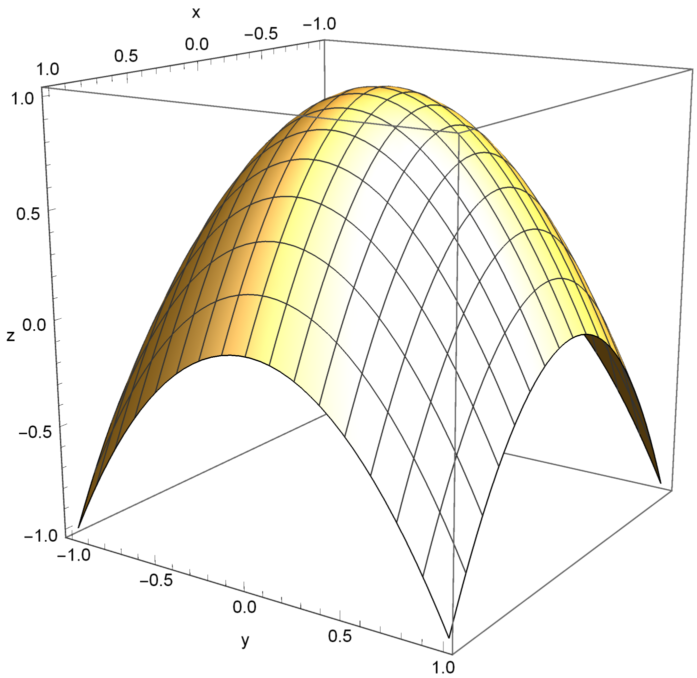
Exercice 2-4 Calculs à la plume

Pour $v = \sqrt{2\, g\, h}$, en $(g,\ h) = \left(9.81\ \frac{m}{s^2},\ 2\ m\right)$, calculez à la main les *dérivées partielles* $\frac{\partial v}{\partial g}$ et $\frac{\partial v}{\partial h}$.

Exercice 2-5 Graphique à la main

On donne le graphique de la fonction

$$z = f\ (x,\ y) = 1 - x^2 - y^2$$



a) Construisez les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz qui passent par l'origine O du repère.

b) Construisez le point $P(0.6;\ 0.5;\ f(0.6; 0.5))$

c) Donnez une interprétation géométrique de la dérivée partielle de f par rapport à x en (0.6; 0.5). Estimez graphiquement sa valeur.

d) Donnez une interprétation géométrique de la dérivée partielle de f par rapport à y en (0.6; 0.5). Estimez graphiquement sa valeur.

Liens

Vers les corrigés des exercices du § 2:

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/plusieurs-variables/2-derivees-partielles-cor.pdf

Vers la page mère : Applications des mathématiques
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html