Marcel Délèze
Edition 2017

§ 4 Approximations de dérivées

§ 4.1 Approximation de la dérivée première par une formule exacte pour les polynômes de degré 2

Considérons 3 points dont les abscisses sont équidistantes

$x_0 = x_1 - h; \quad x_1; \quad x_2 = x_1 + h;$

et calculons la dérivée du polynôme d'interpolation qui passe par ces 3 points

```
Clear[x, y, f, h];
efface
X = {x[1] - h, x[1], x[1] + h};
pts = Transpose[{X, Map[f, X]}]
      transposée    applique
```

{{-h + x[1], f[-h + x[1]]}, {x[1], f[x[1]]}, {h + x[1], f[h + x[1]]}}

```
g[t_] = InterpolatingPolynomial[pts, t]
        polynôme d'interpolation
```

$$f[-h+x[1]] + \left(\frac{f[x[1]] - f[-h+x[1]]}{h} + \frac{\left(-\frac{f[x[1]]-f[-h+x[1]]}{h} + \frac{-f[x[1]]+f[h+x[1]]}{h}\right)(t - x[1])}{2\,h}\right)(h + t - x[1])$$

```
Simplify[g'[x[1]]]
simplifie
```

$$\frac{-f[-h+x[1]] + f[h+x[1]]}{2\,h}$$

$$\boxed{g'(x_1) = \frac{f(x_1+h) - f(x_1-h)}{2\,h}}$$

Il est à remarquer que le résultat ne dépend pas de la valeur de *f* en x_1.

Reformulation

Soit *f* une fonction dont on connaît les valeurs en deux abscisses

$$(x-h,\ f(x-h)), \qquad (x+h,\ f(x+h))$$

L'interpolation de *f* par un polynôme de degré ≤ 2 donne, pour la dérivée de *f* en *x*, l'approximation suivante

$$\text{(Form. 4 – 1)} \qquad \boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}}$$

Proposition

En choisissant un *h* suffisamment petit, on peut obtenir une approximation aussi bonne qu'on veut. Plus précisément,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Si f est un polynôme de degré ≤ 2, alors la formule (Form. 4-1) est exacte.
En particulier, la formule est exacte pour l'horaire d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Exercice 4.1 - 1 [Sans ordinateur]

a) Interprétez et illustrez graphiquement la formule d'approximation de la dérivée

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b) Montrez que la formule d'approximation est exacte pour les polynômes de degré ≤ 1 mais pas pour les polynômes de degré 2.

Exercice 4.1 - 2 [Sans ordinateur]

a) Interprétez et illustrez graphiquement la formule d'approximation de la dérivée

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

b) Montrez que la formule d'approximation est exacte pour les polynômes de degré 2 et donnez une interprétation géométrique.

Conséquence: pour un mobile en mouvement uniformément accéléré d'horaire $r(t)$, l'expression suivante

donne la valeur exacte de sa vitesse à l'instant t

$$v(t) = \frac{r(t+h) - r(t-h)}{2h}$$

c) Montrez, par un contre-exemple, que la formule d'approximation n'est pas exacte pour les polynômes de degré 3.

Exercice 4.1 - 3

On considère une cuve pendant son remplissage. On note

$V(t)$ = volume de liquide qui se trouve dans la cuve à l'instant t,

$d(t)$ = débit qui alimente la cuve à l'instant t.

On a noté les valeurs suivantes:

t [*s*]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V(*t*) [*l*]	0	11.3	21.8	31.	38.7	45.	50.2	54.5	58.	61.	63.5

L'unité de temps est la seconde; l'unité de volume est le litre.

a) [Sans ordinateur] Quelle relation existe-t-il entre $V(t)$ et $d(t)$?

b) [Avec *Mathematica*] Calculez les débits aux instants t = 1 s, t = 2 s, ..., t = 9 s.

Exercice 4.1 - 4 [Avec *Mathematica*]

On considère une population de bactéries dont l'évolution au fil du temps est donnée par la tabelle suivante. L'unité de temps est le jour et l'unité de population est le million de bactéries.

t [j]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(t)$ [10^6]	0.8	0.96	1.15	1.38	1.66	1.99	2.39	2.87	3.44	4.13	4.95

a) Calculez les taux d'accroissement instantanés $p'(t)$ aux temps $t = 1$, ..., $t = 9$.

b) Montrez que $p'(t)$ est proportionnel à $p(t)$.

c) Par calcul, vérifiez l'hypothèse selon laquelle la croissance de $p(t)$ est approximativement exponentielle.

Quelle est l'expression analytique de la fonction $p(t)$?

§ 4.2 Calcul numérique de la dérivée seconde

Considérons 3 points dont les abscisses sont équidistantes

$$x_0 = x_1 - h; \quad x_1; \quad x_2 = x_1 + h;$$

et calculons la dérivée du polynôme d'interpolation qui passe par ces 3 points

```
Clear[x, y, f, h];
```
efface

```
X = {x[1] - h, x[1], x[1] + h};
pts = Transpose[{X, Map[f, X]}]
```
transposée applique

```
{{-h + x[1], f[-h + x[1]]}, {x[1], f[x[1]]}, {h + x[1], f[h + x[1]]}}
```

```
g[t_] = InterpolatingPolynomial[pts, t]
```
polynôme d'interpolation

$$f[-h+x[1]] + \left(\frac{f[x[1]] - f[-h+x[1]]}{h} + \frac{\left(-\frac{f[x[1]]-f[-h+x[1]]}{h} + \frac{-f[x[1]]+f[h+x[1]]}{h}\right)(t - x[1])}{2h}\right)(h + t - x[1])$$

```
Simplify[g''[x[1]]]
```
simplifie

$$\frac{-2 f[x[1]] + f[-h+x[1]] + f[h+x[1]]}{h^2}$$

$$\boxed{g''(x_1) = \frac{f(x_1 - h) - 2 f(x_1) + f(x_1 + h)}{h^2}}$$

Reformulation

Soit *f* une fonction dont on connaît les valeurs en deux abscisses

$$(x - h,\ f(x - h)), \qquad (x + h,\ f(x + h))$$

L'interpolation de *f* par un polynôme de degré ≤ 2 donne, pour la dérivée seconde de *f* en *x*, l'approximation suivante

$$\text{(Form. 4-2)} \qquad \boxed{f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2 f(x) + f(x+h)}{h^2}}$$

Proposition

Si *f* est un polynôme de degré ≤ 2, alors la formule (Form. 4-2) est exacte.
En particulier, la formule est exacte pour l'horaire d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Problème 4.2 - 1 [Avec *Mathematica*]

Pour un mobile, on note

$r(t)$ = position du mobile à l'instant t (la fonction $r(t)$ est appelée horaire du mobile);

$a(t)$ = accélération du mobile à l'instant t.

On a noté les valeurs suivantes:

t [s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$ [m]	0	0.354	1.	1.84	2.83	3.95	5.2	6.55	8	9.55	11.2

L'unité de temps est la seconde; l'unité de position est le mètre.

Calculez les accélérations aux instants $t = 1\,s$, $t = 2\,s$, ..., $t = 9\,s$.

Liens

Vers les corrigés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/interpolation/4-approx-derivees-cor.pdf

Vers la page mère : Applications des mathématiques
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html