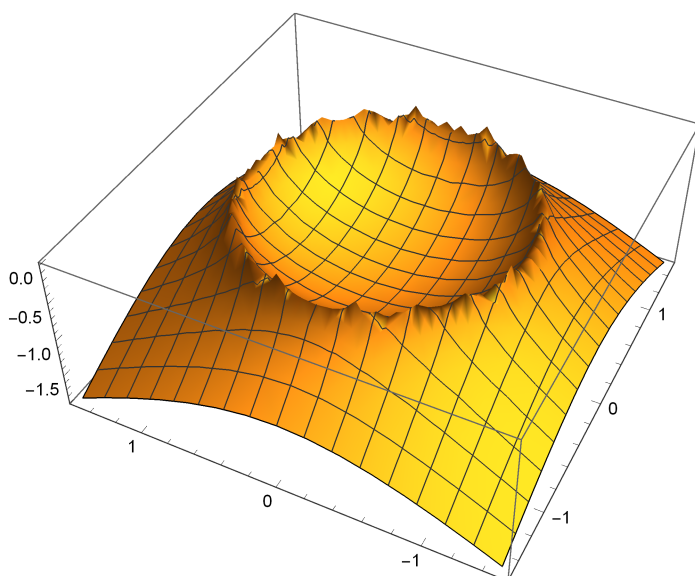


Applications des mathématiques

Introduction à Mathematica



Edition 2017
Marcel Délèze

<https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html>

§ 1 Aperçu

Le but de cette première partie est de parcourir les principales possibilités du langage *Mathematica*. Puisque, dans un premier temps, il ne s'agit que d'un rapide survol, nous nous contenterons d'exhiber des exemples sans donner d'explications techniques.

Nous montrerons que *Mathematica* est un langage qui permet

- d'effectuer des calculs numériques;
- d'effectuer des calculs symboliques;
- de réaliser des graphiques;
- d'écrire des programmes;
- de faire appel à des bibliothèques de programmes;
- d'éditer des documents scientifiques.

Palette

Pour disposer d'une palette de symboles que nous utiliserons souvent, passez par le menu Palettes > Classroom Assistant (ou une autre palette).

Évaluation

Exécutez les inputs qui suivent. Les input sont écrits en caractère gras; le premier input est "2^100".

Pour évaluer un input,

- actionnez la touche **<Enter>** à droite du pavé numérique ou
- actionnez simultanément les touches <MAJ> et <RETURN>.

Par exemple,

4 + 6

10

§ 1.1 Calculs numériques

Mathematica intègre toutes les fonctions mathématiques usuelles qui s'appliquent à des nombres. Voici quelques exemples.

Pour élever 2 à la puissance 100 (en utilisant le clavier) :

2^100

1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376

Pour effectuer le même calcul, on peut utiliser la palette (symbole exposant):

2¹⁰⁰

1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376

Pour écrire la "racine carrée de 2", on peut utiliser la palette:

√2

√2

Pour demander la valeur numérique d'une expression **expr**, on utilise la fonction **N[expr]**. Le crochet s'obtient en actionnant simultanément les deux touches <Alt Gr> et <[> (ou les trois touches <Ctrl>, <Alt> et <[>).

N[$\sqrt{2}$]
 [valeur numérique]
 1.41421

Par défaut, la valeur numérique est calculée avec environ 16 chiffres caractéristiques (valeur stockée en mémoire) et affichée avec environ 6 chiffres caractéristiques. Il faut donc distinguer

$\sqrt{2}$ qui désigne la valeur exacte;

1.414213562373095 qui est la valeur numérique calculée et mémorisée;

1.41421 qui est la valeur numérique affichée.

Pour obtenir le nombre π , on peut aussi utiliser la palette :

N[π]
 [valeur numérique]
 3.14159

Le symbole de la multiplication est l'espace (ou l'étoile):

N[3 π]
 [valeur numérique]
 9.42478

La division peut être désignée par la barre oblique du clavier :

5 / 7
 $\frac{5}{7}$

Il s'agit là de la valeur exacte du nombre rationnel dont on peut demander une valeur numérique approchée:

N[5 / 7]
 [valeur numérique]
 0.714286

La division peut aussi être indiquée au moyen de la palette

N[$\frac{5}{7}$]
 [valeur numérique]
 0.714286

Mathematica est capable de faire des calculs à n'importe quelle précision. La fonction **N[expr, n]** donne la valeur numérique de *expr* à *n* chiffres significatifs pour $n \geq 17$:

N[$\sqrt{2}$, 30]
 [valeur numérique]
 1.41421356237309504880168872421

N[π , 40]

[valeur numérique]

3.141592653589793238462643383279502884197

N[$\frac{5}{7}$, 50]

[valeur numérique]

0.71428571428571428571428571428571428571

L'unité d'angle par défaut est le radian:

N[Cos [1]]

[cosinus]

0.540302

mais on peut aussi calculer en degrés; le symbole "degré" se trouve

- soit sur le clavier, en haut à gauche;

- soit dans la palette:

N[Sin [20 °]]

[sinus]

0.34202

Voici la liste des 12 premiers nombres premiers:

Table [Prime [n], {n, 1, 12}]

[table [nombre premier]]

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}

Voici la décomposition d'un entier en facteurs premiers:

FactorInteger [2 434 500]

[factorise entier]

{{2, 2}, {3, 2}, {5, 3}, {541, 1}}

Vérifions le résultat obtenu:

$$2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 541^1$$

2 434 500

Mathematica peut calculer une somme de termes. Par exemple, la somme des carrés des 100 premiers entiers positifs $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$ s'écrit comme suit (pour obtenir le symbole "somme", on peut utiliser la palette) :

$$\sum_{i=1}^{100} i^2$$

338 350

Cette formule signifie que, dans l'expression i^2 , il faut donner à i les valeurs successives 1, 2, 3, ..., 99, 100 puis additionner tous les termes obtenus.

§ 1.2 Calculs symboliques

Mathematica peut aussi travailler avec les symboles, c'est-à-dire avec des lettres comme en calcul

algébrique.

Pour effectuer des produits et des exponentiations:

Clear [a, b, x]

[efface

Expand [(a - 2 b) (a + b)³]

[développe

$$a^4 + a^3 b - 3 a^2 b^2 - 5 a b^3 - 2 b^4$$

Pour factoriser une expression:

Factor [x⁴ - 1]

[factorise

$$(-1 + x) (1 + x) (1 + x^2)$$

Pour réduire au dénominateur commun:

Together [$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$]

[regroupe

$$\frac{a b}{a + b}$$

Pour simplifier une expression:

Simplify [$\frac{1}{4(-1+x)} - \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2(1+x^2)}$]

[simplifie

$$\frac{1}{-1 + x^4}$$

Pour extraire le numérateur et le dénominateur d'une fraction rationnelle:

Numerator [$\frac{\frac{3x}{2} - 7}{x^2 - \frac{3}{4}}$]

[numérateur

$$-7 + \frac{3x}{2}$$

Denominator [$\frac{\frac{3x}{2} - 7}{x^2 - \frac{3}{4}}$]

[dénominateur

$$-\frac{3}{4} + x^2$$

Pour le quotient de deux polynômes, **PolynomialQuotient**[...] donne le quotient tandis que **PolynomialRemainder**[...] donne le reste. On doit donner trois arguments: le dividende, le diviseur et la variable.

PolynomialQuotient [x³ - 2 x² + 3 x - 4, x² - 1, x]

[Quotient du polynômes

$$-2 + x$$

PolynomialRemainder [$x^3 - 2x^2 + 3x - 4, x^2 - 1, x$]

[\[reste de polynômes\]](#)

$$-6 + 4x$$

Vérifions:

Expand [$(-2 + x)(x^2 - 1) + (-6 + 4x)$]

[\[développe\]](#)

$$-4 + 3x - 2x^2 + x^3$$

Le dernier argument indique quelle est la variable. Par exemple,

PolynomialQuotient [$a^3 + a^2b + b^2, a - b, a$]

[\[Quotient du polynômes\]](#)

$$a^2 + 2ab + 2b^2$$

PolynomialQuotient [$a^3 + a^2b + b^2, a - b, b$]

[\[Quotient du polynômes\]](#)

$$-a - a^2 - b$$

PolynomialQuotient [$a^3 + a^2b + b^2, a - b, x$]

[\[Quotient du polynômes\]](#)

$$\frac{a^3 + a^2b + b^2}{a - b}$$

Il est possible de définir des fonctions et de composer plusieurs commandes:

Clear [f, x];

[\[efface\]](#)

$$f[x_] := \frac{x^2 - 3x + 8}{2x - 3};$$

PolynomialQuotient [**Numerator** [$f[x]$], **Denominator** [$f[x]$], x]

[\[Quotient du polynômes\]](#) [\[numérateur\]](#) [\[dénominateur\]](#)

$$-\frac{3}{4} + \frac{x}{2}$$

PolynomialRemainder [**Numerator** [$f[x]$], **Denominator** [$f[x]$], x]

[\[reste de polynômes\]](#) [\[numérateur\]](#) [\[dénominateur\]](#)

$$\frac{23}{4}$$

Mathematica est capable de résoudre des équations numériques et littérales ainsi que des inéquations. Avec la commande **Reduce**[...], le premier argument est l'équation; pour former une équation comme $x^2 - 7x - 2 == 0$, il faut répéter de symbole d'égalité. Le deuxième argument, ici x , désigne l'inconnue. Le troisième argument, **Reals**, signifie "sur l'ensemble des nombres réels":

Reduce [$x^2 - 7x - 2 == 0, x, \mathbf{Reals}$]

[\[réduis\]](#) [\[nombres\]](#)

$$x == \frac{1}{2} (7 - \sqrt{57}) \ || \ x == \frac{1}{2} (7 + \sqrt{57})$$

Le symbole `||` signifie "ou".

Reduce [$x^2 + 1 == 0$, x , **Reals**]
 [réduis] [nombres]

False

La réponse signifie que l'équation n'est pas vérifiée quel que soit x réel; en d'autres termes, que l'ensemble des solutions est vide.

L'équation peut aussi être littérale:

Clear [x , m];

[efface]

Reduce [$x^2 + m x - 2 == 0$, x , **Reals**]
 [réduis] [nombres]

$$x == -\frac{m}{2} - \frac{\sqrt{8 + m^2}}{2} \quad || \quad x == -\frac{m}{2} + \frac{\sqrt{8 + m^2}}{2}$$

Reduce [$x^2 + m x - 2 == 0$, m , **Reals**]
 [réduis] [nombres]

$$(x < 0 \quad || \quad x > 0) \quad \&\& \quad m == \frac{2 - x^2}{x}$$

Le symbole **&&** signifie "et".

Reduce[...] permet aussi de résoudre des inéquations:

Reduce [$x^2 - 7 x - 2 > 0$, x , **Reals**]
 [réduis] [nombres]

$$x < \frac{1}{2} (7 - \sqrt{57}) \quad || \quad x > \frac{1}{2} (7 + \sqrt{57})$$

D'autres précisions seront apportées dans le § 2 *Premiers principes*.

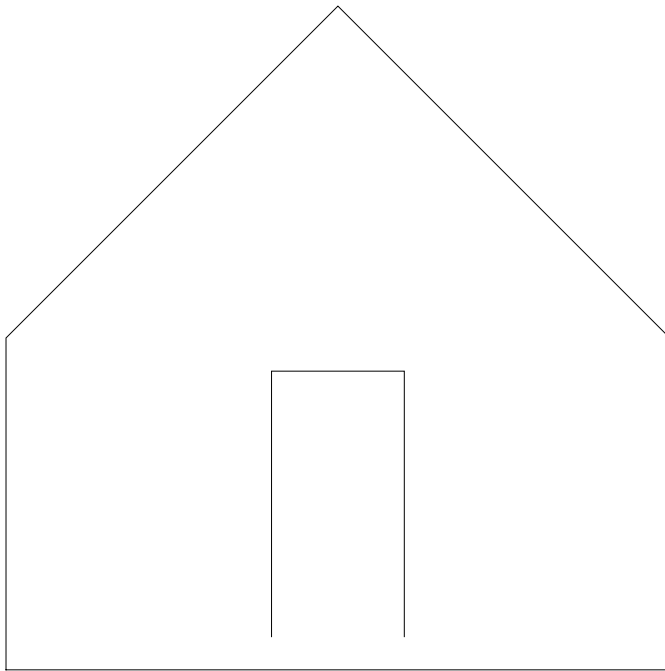
§ 1.3 Graphiques

Voici un graphique constitué de deux lignes polygonales, la première étant fermée et la deuxième ouverte:

```

Graphics[
  |graphique
  {Line[{{0, 0}, {0, 1}, {1, 2}, {2, 1}, {2, 0}, {0, 0}}],
  |ligne
  Line[{{0.8, .1}, {0.8, .9}, {1.2, .9}, {1.2, .1}}]},
  AspectRatio -> Automatic]
  |rapport d'aspect |automatique

```

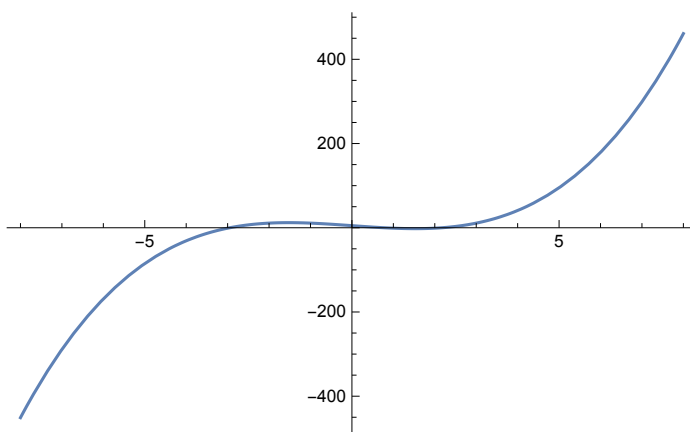


Voici le graphique d'une fonction à une variable:

```

Clear[x];
|efface
Plot[x3 - 7 x + 5, {x, -8, 8}]
|tracé de courbes

```



On peut superposer les graphiques de deux fonctions:


```
Plot[{x^2 - x - 2,  $\frac{1}{2}x + 1$ }, {x, -4, 5},
```

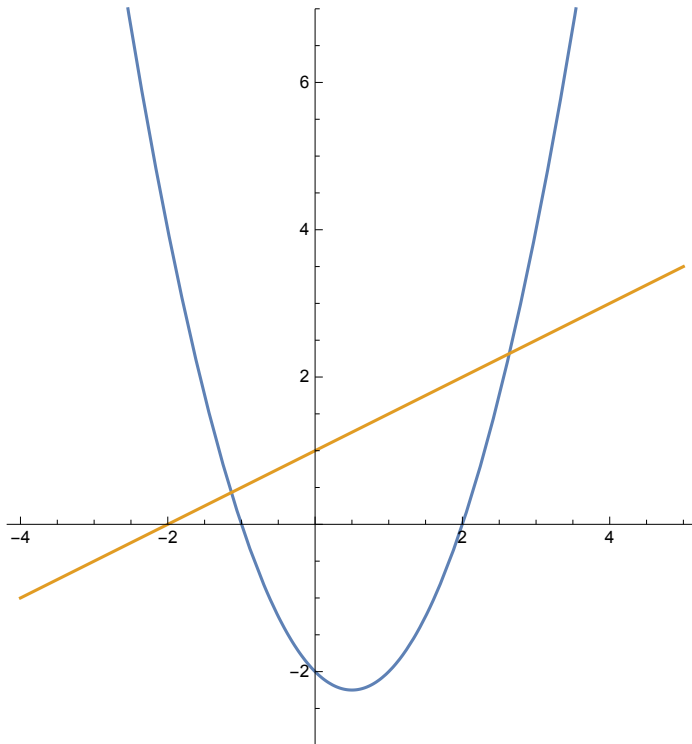
[tracé de courbes

```
PlotRange -> {-3, 7},
```

[zone de tracé

```
AspectRatio -> Automatic]
```

[rapport d'aspect [automatique



Graphique d'une courbe paramétrée (horaire d'un mobile):

```
Clear[x, y];
```

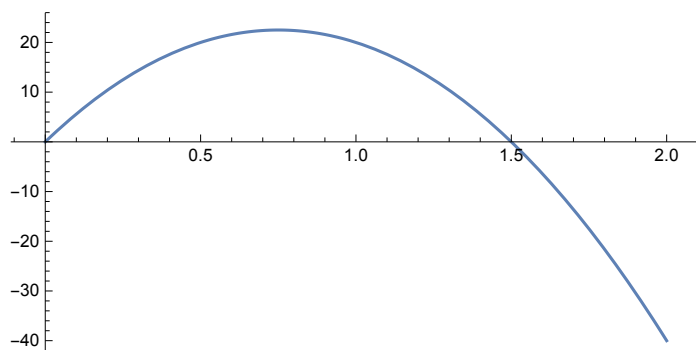
[efface

```
x[t_] := 0.5 t;
```

```
y[t_] := 30 t - 10 t^2;
```

```
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 4}, AspectRatio -> 1/2]
```

[représentation graphique de courbes paramétrées [rapport d'aspect



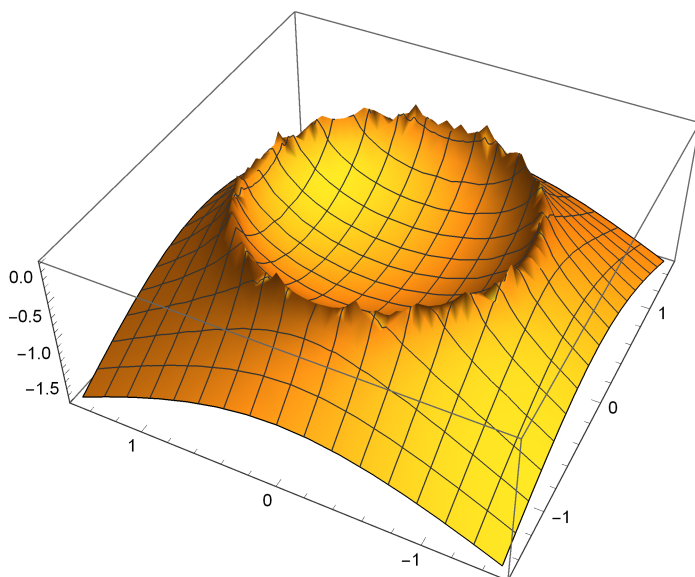
Graphique d'une fonction de deux variables:

```
Plot3D[-√Abs[1-x²-y²], {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5},


```

```
ViewPoint -> {-2, -1, 2}]
```

```
[point de vue spatial
```



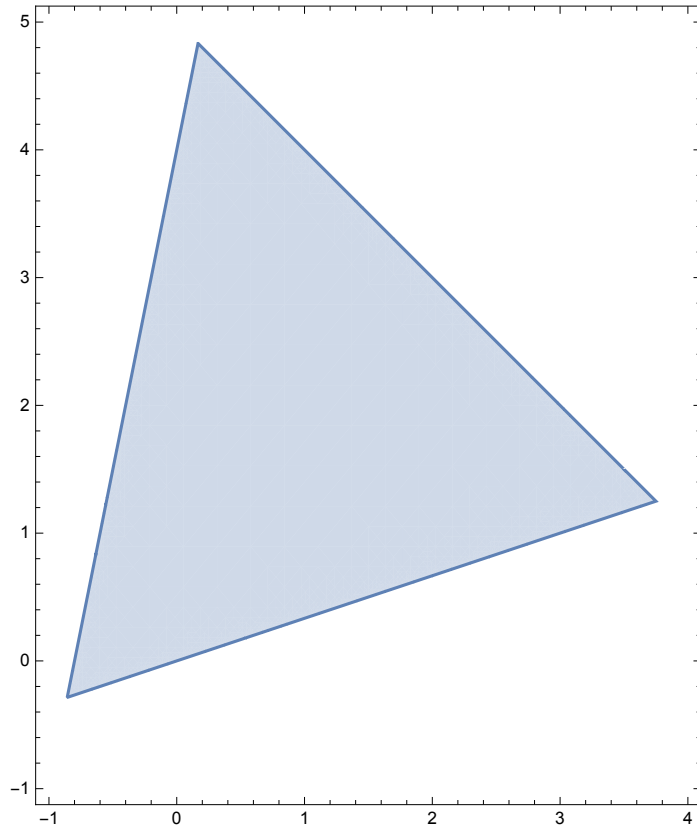
Un exemple de résolution graphique du système d'inéquations

$$\begin{cases} y < 5 - x & \text{et} \\ y > \frac{1}{3}x & \text{et} \\ y < 5x + 4 \end{cases}$$

Ci-après, le symbole \wedge de la palette signifie "et"

```
RegionPlot[y < 5 - x & y >  $\frac{1}{3}x$  & y < 5x + 4, {x, -1, 4},


```



Il est aussi possible de réaliser une animation, c'est-à-dire un mouvement représenté par une liste d'images (voir § 2).

§ 1.4 Programmation

Mathematica est aussi un langage de programmation. En particulier, l'utilisateur peut créer de nouvelles commandes. Voici par exemple comment on peut définir la moyenne arithmétique d'une liste de nombres:

```
Clear[moyenne];
[efface

moyenne[a_List] := N[ $\frac{\text{Apply}[Plus, a]}{\text{Length}[a]}$ ]
[valeur numérique]
```

L'instruction précédente n'a effectué aucun calcul, mais elle a défini une nouvelle commande dénommée "moyenne". Maintenant, nous pouvons utiliser cette nouvelle commande autant de fois que désiré:

```
moyenne[{3.7, 4.3, 5.2, 5.6}]
4.7
```

```
moyenne[{4.75, 5, 4.75}]
```

```
4.83333
```

Parmi les notions importantes de *Mathematica*, il faut mentionner les fonctions et les listes ("moyenne" est une fonction qui s'applique à une liste).

Voici un problème dont la résolution fera appel à deux fonctions:

"Déterminez graphiquement et par calcul les abscisses des points d'intersection des courbes $y = x^3 - 7x - 2$ et $y = 4 - x^2$."

```
Clear[f, g, x];
```

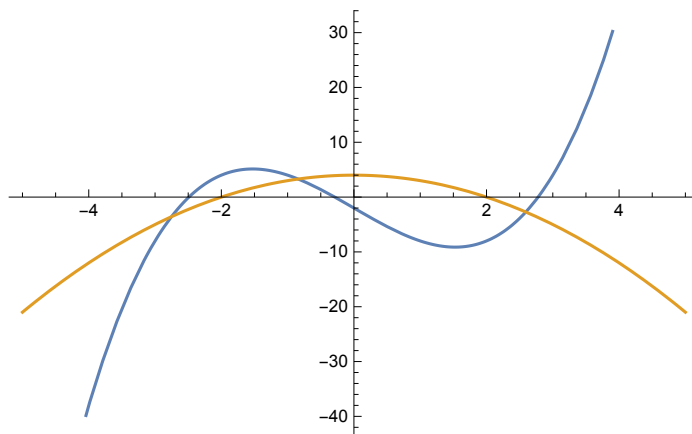
```
[efface
```

```
f[x_] := x3 - 7 x - 2;
```

```
g[x_] := 4 - x2;
```

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -5, 5}]
```

```
[tracé de courbes
```



En lisant le graphique, on peut observer que les deux courbes se coupent en trois points dont les abscisses valent approximativement -2.8 , -0.8 et 2.6

Mathematica peut calculer précisément les abscisses des points d'intersection

```
Reduce[f[x] == g[x], x, Reals]
```

```
[réduis [nombres
```

```
x == Root[-6 - 7 #1 + #12 + #13 &, 1] ||
```

```
x == Root[-6 - 7 #1 + #12 + #13 &, 2] || x == Root[-6 - 7 #1 + #12 + #13 &, 3]
```

Les solutions sont les racines du polynôme du troisième degré $(-6 - 7x + x^2 + x^3)$ dont on peut demander des valeurs numériques approchées:

```
N[Reduce[f[x] == g[x], x, Reals]]
```

```
[· [réduis [nombres ré
```

```
x == -2.75153 || x == -0.841083 || x == 2.59261
```

§ 1.5 Suppléments ou fichiers d'extension (Packages)

L'utilisateur peut créer de nouvelles commandes et les ajouter à *Mathematica*. Des groupes de commandes supplémentaires peuvent être enregistrées dans des fichiers dénommés "suppléments" ou "fichiers d'extension" (ou "Packages"). L'utilisateur peut ensuite y faire appel.

Avec *Mathematica* sont livrés des suppléments résolvant divers problèmes. Ces fichiers d'extension qui sont partagés par tous les utilisateurs de *Mathematica* sont dénommés "fichiers d'extension standard" (ou "Standard Packages").

Nous en reparlerons si nécessaire.

§ 1.6 Edition de documents scientifiques

Mathematica permet d'écrire des documents qui contiennent des textes, des calculs et des graphiques. Le cours que vous lisez en est un exemple.

Exercices

Exercice 1-1

- a) Calculez la valeur numérique des expressions suivantes.
Pour les entiers, on demande la valeur exacte;
pour les nombres non entiers, on demande la valeur numérique (à la précision par défaut).

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\sin(72^\circ)$$

$$\frac{3\pi}{4}$$

$$(3 * 1 + 1) + (3 * 2 + 1) + (3 * 3 + 1) + \dots + (3 * 20 + 1)$$

- b) Le nombre suivant est-t-il premier ?

$$2^{103} - 1$$

Exercice 1-2

- a) Développez les expressions suivantes puis trouvez les règles qui permettent de déterminer les coefficients de la ligne suivante (il s'agit du triangle de Pascal) :

$$(a + b)^2$$

$$(a + b)^3$$

$$(a + b)^4$$

$$(a + b)^5$$

$$(a + b)^6$$

- b) Réduisez l'expression suivante au dénominateur commun

$$\frac{4}{1-x} - \frac{5}{1+x} + \frac{3x}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^2+x} + \frac{2x}{x^2-x}$$

- c) Résolvez l'équation

$$\frac{4}{1-x} - \frac{5}{1+x} + \frac{3x}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^2+x} + \frac{2x}{x^2-x} = 0$$

Exercice 1-3

- a) Dessinez une échelle verticale comportant 5 échelons horizontaux.

- b) Résolvez graphiquement l'équation suivante, c'est-à-dire superposez dans un même repère les graphiques des fonctions du membre de gauche et du membre de droite:

$$\frac{3x}{x-1} = x^2 - x - 6$$

- c) Résolvez par calcul l'équation précédente.
d) Dessinez la trajectoire du mobile dont l'horaire est

$$\begin{aligned}x(t) &= 4t, \\y(t) &= 6t - 9.8t^2 \\0 &\leq t \leq 1\end{aligned}$$

Exercice 1-4

Dans un même repère, représentez graphiquement les deux courbes

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 3x - 1 \\y &= -x^2 + x + 3\end{aligned}$$

Calculer les abscisses des points d'intersection.

Lien vers les corrigés des exercices

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/initiation_mathematica/1-apercu-cor.pdf