Marcel Délèze
Edition 2017

§ 2 Equations différentielles ordinaires du deuxième ordre

§ 2.1 Equations différentielles du deuxième ordre Exemples et approche qualitative

Oscillateur mécanique entretenu et amorti

Forces:

$-k\,y$ = force de rappel du ressort;

k est appelé constante du ressort;

$-f\,v = -f\,y'$ = force de frottement dans le cas d'un écoulement laminaire (c'est-à-dire sans turbulences); f est appelé *coefficient d'amortissement*;

$A \sin(\Omega\, t)$ = force d'excitation où

A est appelé *amplitude de l'excitation* et

Ω est appelé *vitesse angulaire* (ou pulsation) de l'excitateur.

En l'absence d'autres forces, selon la loi de Newton,

$$-k\,y - f\,y' + A \sin(\Omega\,t) = m\,y''$$

$$y'' + \frac{f}{m}\,y' + \frac{k}{m}\,y = \frac{A}{m}\sin(\Omega\,t)$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner deux conditions initiales, la vitesse initiale et la position initiale:

$$y'(t_0) = v_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

Oscillateur électrique entretenu et amorti

Dans un circuit RLC série, on a

$L\,I'$ = chute de tension aux bornes de la bobine;

$R\,I$ = chute de tension aux bornes de la résistance (amortissement);

$\frac{Q}{C}$ = chute de tension aux bornes du condensateur;

$U_0 \sin(\Omega\,t)$ = tension aux bornes du générateur.

$$L\,I' + R\,I + \frac{Q}{C} = U_0 \sin(\Omega\,t)$$

$$L\,Q'' + R\,Q' + \frac{Q}{C} = U_0 \sin(\Omega\,t)$$

$$Q'' + \frac{R}{L}\,Q' + \frac{1}{L\,C}\,Q = \frac{U_0}{L}\sin(\Omega\,t)$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner deux conditions initiales, le courant initial et la charge initiale:

$$Q'(t_0) = I_0$$
$$Q(t_0) = Q_0$$

Définitions

Une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est une équation dans laquelle la dérivée seconde $y''(t)$ est exprimée en fonction d'une variable t, de $y(t)$ et de la dérivée première $y'(t)$:

$$y'' = f(t, y, y')$$

On cherche la fonction $t \mapsto y(t)$ qui vérifie l'équation.
Dans le premier exemple (oscillations mécaniques), la fonction f est

$$f(t, y, y') = -\frac{f}{m} y' - \frac{k}{m} y + \frac{A}{m} \sin(\Omega t)$$

Les conditions initiales d'une telle équation sont généralement au nombre de *deux* et de la forme

$$y'(t_0) = y_1$$
$$y(t_0) = y_0$$

L'équation est dite différentielle parce qu'elle contient des *dérivées* de la fonction inconnue $y(t)$.

On dit que l'équation est ordinaire parce que la fonction cherchée $y(t)$ ne dépend que d'*une seule variable* t.

On dit que l'équation est du deuxième ordre parce qu'elle contient une dérivée d'ordre deux (c'est-à-dire $y''(t)$) mais aucune dérivée d'ordre supérieur à deux.

Etude expérimentale qualitative

Au lieu d'être fondée sur des expériences de physique, notre approche qualitative s'appuyera sur des calculs exécutés par *Mathematica*. Dans une première lecture, il est conseillé de ne pas s'attarder sur la manière de calculer car nous y reviendrons dans les prochains paragraphes. Portez plutôt votre attention sur les propriétés des solutions obtenues comme s'il s'agissait de résultats expérimentaux.

```
SetOptions[Plot, AxesLabel → {"t", "y(t)"}, PlotRange → All, ImageSize → {400, 300}];
alloue options  tracé··  titre d'axe          zone de tracé  tout  taille d'image
```

Solution générale

Si on ne donne pas de conditions initiales, l'équation différentielle du deuxième ordre possède une infinitié de solutions qui dépendent de deux paramètres $C[1]$, $C[2]$ appelées *constantes d'intégration*. Voici un exemple numérique:

```
p = 1; q = 17; Ω = 5; g0 = 2; t1 = 4.3;
Clear[g, y, t]; g[t_] := g0 Sin[Ω t]
efface                    sinus
```

```
sol = DSolve[y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[t], t]
      résous équation différentiel
```

$$\left\{\left\{y[t] \to e^{-t} C[2] \operatorname{Cos}[4t] + e^{-t} C[1] \operatorname{Sin}[4t] + \frac{1}{328}\left(-41 \operatorname{Cos}[t] \operatorname{Cos}[4t] + \operatorname{Cos}[4t] \operatorname{Cos}[9t] - 41 \operatorname{Cos}[4t] \operatorname{Sin}[t] - 41 \operatorname{Cos}[t] \operatorname{Sin}[4t] - 9 \operatorname{Cos}[9t] \operatorname{Sin}[4t] + 41 \operatorname{Sin}[t] \operatorname{Sin}[4t] + 9 \operatorname{Cos}[4t] \operatorname{Sin}[9t] + \operatorname{Sin}[4t] \operatorname{Sin}[9t]\right)\right\}\right\}$$

```
yg[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```
simplifie

$$e^{-t} C[2] \, Cos[4 t] - \frac{5}{41} Cos[5 t] + e^{-t} C[1] \, Sin[4 t] - \frac{4}{41} Sin[5 t]$$

Solution vérifiant les conditions initiales

Parmi les solutions précédentes, il en existe une et une seule qui vérifie deux conditions initiales données

```
y0 = 0; y1 = 0; Clear[y, t];
```
efface

```
sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[0] == y0, y'[0] == y1}, y[t] , t]
```
résous équation différentiel

$$\Big\{\Big\{y[t] \to -\frac{1}{328} e^{-t} \Big(-40 \, Cos[4 t] + 41 e^{t} Cos[t] \, Cos[4 t] - e^{t} Cos[4 t] \, Cos[9 t] + 41 e^{t} Cos[4 t] \, Sin[t] - 50 \, Sin[4 t] + 41 e^{t} Cos[t] \, Sin[4 t] + 9 e^{t} Cos[9 t] \, Sin[4 t] - 41 e^{t} Sin[t] \, Sin[4 t] - 9 e^{t} Cos[4 t] \, Sin[9 t] - e^{t} Sin[4 t] \, Sin[9 t]\Big)\Big\}\Big\}$$

```
yi[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```
simplifie

$$\frac{1}{328} e^{-t} \left(40 \, Cos[4 t] - 40 e^{t} Cos[5 t] + 50 \, Sin[4 t] - 32 e^{t} Sin[5 t]\right)$$

Vérifions que yi[*t*] est bien solution du système:

```
Simplify[yi''[t] + 2 p yi'[t] + q yi[t] - g[t]]
```
simplifie

```
0
```

```
yi[0]
```

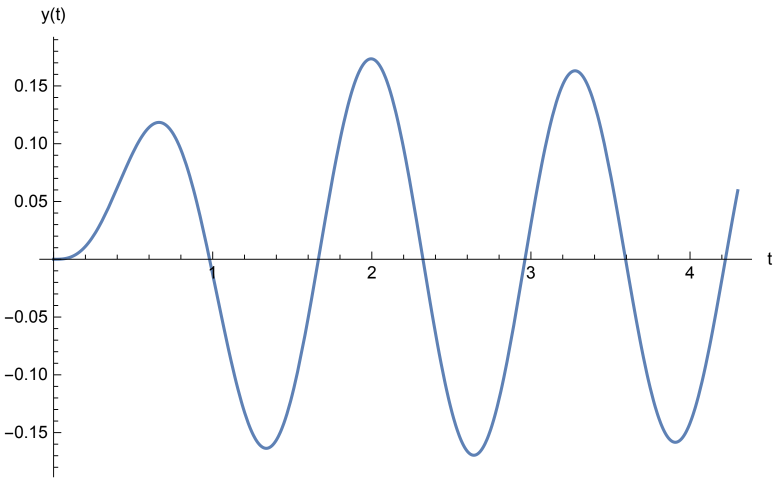
```
0
```

```
yi'[0]
```

```
0
```

Graphique:

```
Plot[yi[t], {t, 0, t1}]
```
tracé de courbes



Dépendance de la condition initiale : état transitoire, état stationnaire

Calculons d'autres solutions de la même équation différentielle mais en partant de conditions initiales différentes:

$$y0 = \frac{1}{5};\ y1 = 0;$$

```
sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[0] == y0, y'[0] == y1}, y[t] , t];
```
résous équation différentiel

```
yi1[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```
simplifie

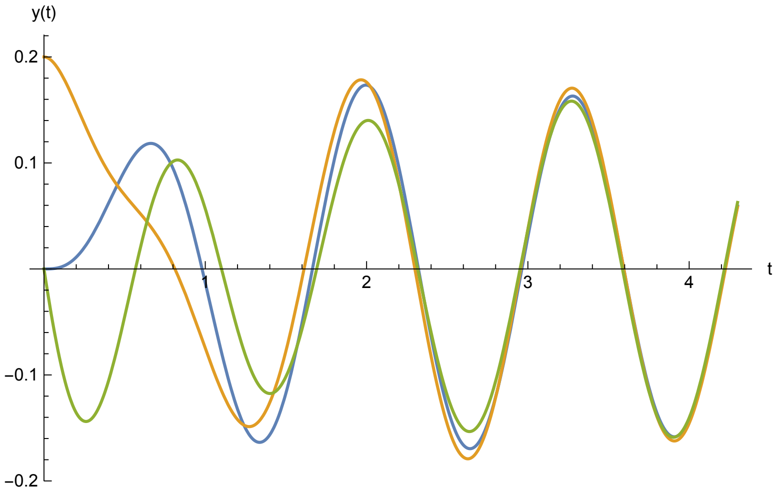
$$\frac{1}{410}\, e^{-t} \left(132\,\mathrm{Cos}[4\,t] - 50\, e^{t}\, \mathrm{Cos}[5\,t] + 83\,\mathrm{Sin}[4\,t] - 40\, e^{t}\, \mathrm{Sin}[5\,t]\right)$$

```
y0 = 0; y1 = -1;
sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[0] == y0, y'[0] == y1}, y[t] , t];
```
résous équation différentiel

```
yi2[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```
simplifie

$$-\frac{1}{41}\, e^{-t} \left(-5\,\mathrm{Cos}[4\,t] + 5\, e^{t}\, \mathrm{Cos}[5\,t] + 4\left(\mathrm{Sin}[4\,t] + e^{t}\, \mathrm{Sin}[5\,t]\right)\right)$$

```
Plot[{yi[t], yi1[t], yi2[t]}, {t, 0, t1}]
```
tracé de courbes



Au début du mouvement, la position de l'oscillateur dépend des conditions initiales. Cet intervalle de temps est appelé *état transitoire*. Après un certain temps, l'oscillateur atteint un état de mouvement qui ne dépend presque plus des conditions initiales; c'est l'*état stationnaire.*

Une solution particulière

A l'état stationnaire, le mouvement de l'oscillateur est approximativement harmonique. Nous montrerons dans le § 2.3 qu'il existe une solution particulière qui est une *sinusoïde* :

```
Clear[yp];
```
efface

$$yp[t\_] := \frac{g0}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\,p\,\Omega)^2}}\,\mathrm{Sin}\left[\Omega\, t - \mathrm{ArcCos}\left[\frac{q-\Omega^2}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\,p\,\Omega)^2}}\right]\right];$$
sinus arc cosinus

```
yp[t]
```

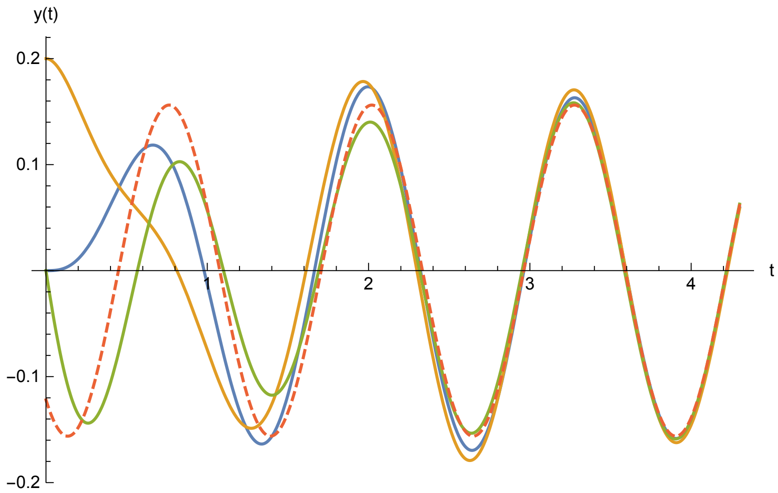
$$\frac{\mathrm{Sin}\left[5\,t - \mathrm{ArcCos}\left[-\frac{4}{\sqrt{41}}\right]\right]}{\sqrt{41}}$$

Vérifions que cette fonction est une solution de l'équation différentielle

```
FullSimplify[yp''[t] + 2 p yp'[t] + q yp[t] - g[t]]
```
simplifie complètement

```
0
```

```
Plot[{yi[t], yi1[t], yi2[t], yp[t]}, {t, 0, t1},
tracé de courbes
 PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{}], Dashing[{}], Dashing[{0.01}]}]
 style de tracé  style de rayures  style de rayures  style de rayures  style de rayures
```



Cette solution correspond à des conditions initiales particulières qui dépendent des données

```
yp[0]
```

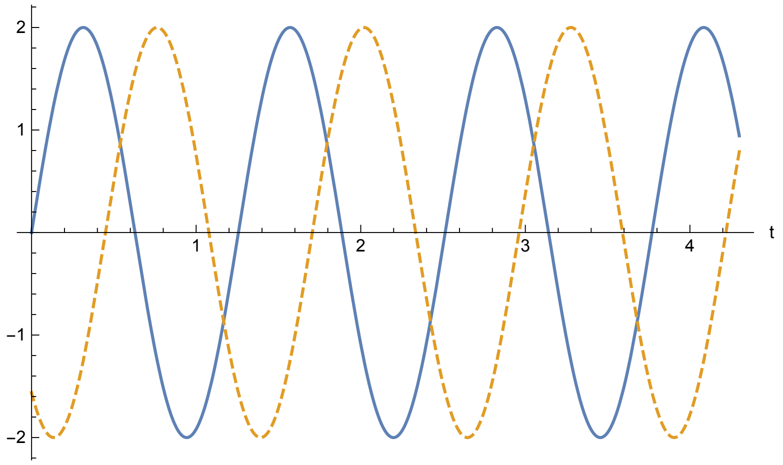
$$-\frac{5}{41}$$

```
yp'[0]
```

$$-\frac{20}{41}$$

Pour estimer la fréquence de cette solution particulière, comparons-la à la fréquence de l'excitateur:

```
Plot[{g[t], √((q - Ω²)² + (2 p Ω)²) yp[t]}, {t, 0, t1},
tracé de courbes
 PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.01}]}, AxesLabel → {"t", None}]
 style de tracé  style de rayures  style de rayures  titre d'axe  aucun
```

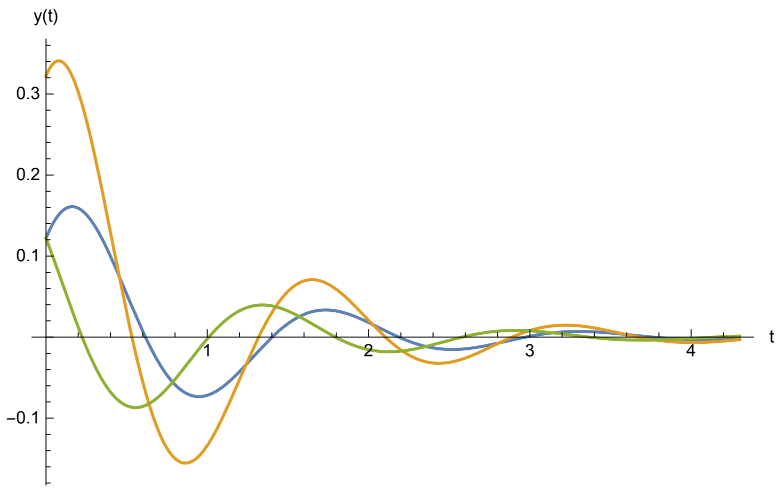


On observe que, après une période transitoire, l'excitateur contraint le système à osciller à *la même fréquence* que lui. Cependant, le mouvement d'oscillation peut être *déphasé* par rapport au mouvement d'entretien.

Solution générale homogène

En quoi deux solutions générales diffèrent-elles ?

```
Plot[{yi[t] - yp[t], yi1[t] - yp[t], yi2[t] - yp[t]}, {t, 0, t1}]
tracé de courbes
```



On constate que la différence entre deux solutions particulières tend rapidement vers 0. L'intervalle de temps durant lequel cette différence est non négligeable est appelé *phase transitoire*.

Du point de vue mathématique

Considérons deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ qui vérifient la même équation différentielle

$$y_1''(t) + 2\,p\,y_1'(t) + q\,y_1(t) = g(t)$$
$$y_2''(t) + 2\,p\,y_2'(t) + q\,y_2(t) = g(t)$$

Soustrayons les deux équations:

$$(y_2''(t) - y_1''(t)) + 2\,p\,y_2'(t) - 2\,p\,y_1'(t) + q\,y_2(t) - q\,y_1(t) = 0$$
$$(y_2 - y_1)''(t) + 2\,p\,(y_2 - y_1)'(t) + q\,(y_2 - y_1)(t) = 0$$

Notons $y_{hom} = y_2 - y_1$ cette différence. On a

$$y_{hom}''(t) + 2\,p\,y_{hom}'(t) + q\,y_{hom}(t) = 0$$

Les équations pour lesquelles ces soustractions prennent une forme simple sont appelées *équations différentielles linéaires*. Une définition plus précise sera donnée dans le paragraphe 2.2.

On appelle *équation homogène associée* l'équation différentielle que l'on obtient en remplaçant $g(t)$ par 0, c'est-à-dire $y'' + 2\,p\,y' + q\,y = 0$. La solution générale de l'équation homogène associée est notée y_{hom}. Par opposition, l'équation initiale $y'' + 2\,p\,y' + q\,y = g(t)$ dans laquelle $g(t) \neq 0$ est appelée *équation inhomogène*.

Nous venons de démontrer que la différence entre deux solutions de l'équation inhomogène est solution de l'équation homogène.

$$y_2 - y_1 = y_{hom}$$

Réciproquement, si on ajoute une solution homogène y_{hom} à une solution particulière inhomogène y_1, on obtient une autre solution inhomogène y_2

$$y_2 = y_1 + y_{hom}$$

Enfin, si on dispose d'une solution particulière inhomogène y_1, il est possible d'obtenir n'importe quelle autre solution inhomogène y_2 en ajoutant à y_1 une solution homogène appropriée y_{hom}.

Du point de vue physique

La différence $y_{hom} = y_2 - y_1$ étant une solution de l'équation homogène

$$y_{hom}''(t) + 2\,p\,y_{hom}'(t) + q\,y_{hom}(t) = 0$$

elle décrit le mouvement d'un système *non entretenu*, c'est-à-dire avec $g(t) = 0$.

Si le frottement n'est pas nul ($p > 0$), après une phase transitoire, l'oscillateur non entretenu tend vers l'état de repos (voir figure précédente).

Travaux dirigés du § 2.1

2.1- TD 1 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Considérons un corps de masse m soumis à une force constante F. D'après l'équation de Newton, on a

$$m\,a = F$$

Le problème consiste à déterminer l'horaire $y(t)$ de la masse. La cinématique nous enseigne que la dérivée de l'horaire donne la vitesse $v(t)$ et la dérivée de la vitesse donne l'accélération $a(t)$

$$y'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t) \quad \Longrightarrow \quad y''(t) = a(t)$$

En remplaçant dans l'équation de Newton, on obtient l'équation différentielle

$$y''(t) = \frac{F}{m} \qquad \text{où} \quad m, F \quad \text{constants}$$

Nous y ajoutons les deux conditions initiales

$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = v_0$$

a) Résolvez cette équation différentielle ordinaire du deuxième ordre avec conditions initiales. (On ne demande pas seulement la réponse mais une méthode pour la déterminer.)

b) Vérifiez la réponse obtenue (ou la réponse connue).

c) Résolvez le cas particulier $y''(t) = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$.

2.1- TD 2 Mouvement harmonique

On se place maintenant dans le cas où l'oscillateur n'est ni amorti ($f = 0$ donc $p = 0$), ni entretenu ($g(t) = 0$). Plus concrètement, considérons une masse m qui peut coulisser sans frottement le long d'une tige horizontale. Cette masse est soumise à l'action d'un ressort de masse négligeable et de raideur k. Appelons $y(t)$ sa position à l'instant t.

L'équation de Newton $F = m\,a$ prend la forme d'une équation différentielle

$$-k\,y = m\,y''$$

qui se réduit à

$$y'' + q\,y = 0 \qquad \text{où} \qquad q = \frac{k}{m}$$

<u>Solutions de base</u>

Calculez la valeur de ω pour laquelle les deux fonctions suivantes sont solutions

$$y_1(t) = \cos(\omega t)$$
$$y_2(t) = \sin(\omega t)$$

<u>Solution générale</u>

Principe de superposition : montrez que toute combinaison linéaire des deux fonctions de base est solution de l'équation différentielle

$$y(t) = c_1\,y_1(t) + c_2\,y_2(t)$$

<u>Solution vérifiant les conditions initiales</u>

Les deux conditions initiales

$$y(0) = y0, \quad y'(0) = v0$$

déterminent univoquement les constantes $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

<u>Autres formes de la solution</u>

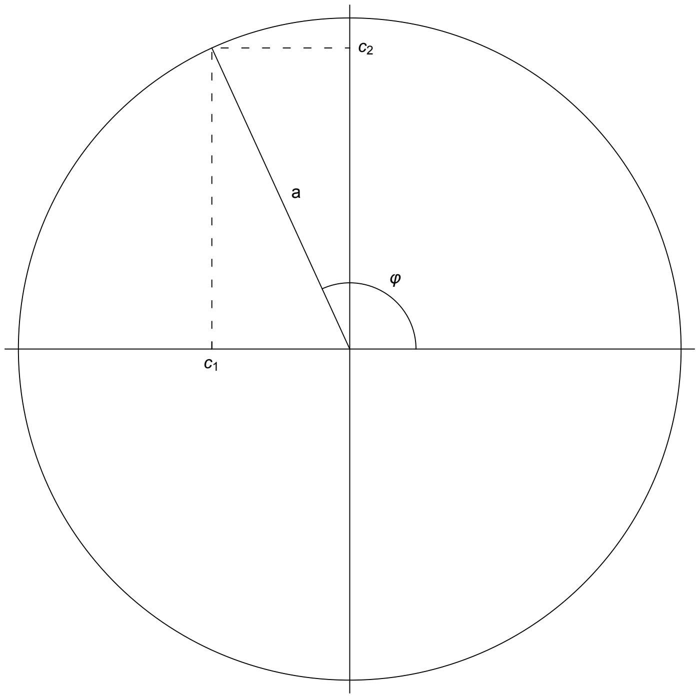
Toute solution peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = a\cos(\omega t - \varphi)$$

Pour le montrer, commençons par écrire le vecteur suivant sous la forme polaire

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{et}$$

$$\varphi \quad \text{tel que} \quad \cos(\varphi) = \frac{c_1}{a} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{c_2}{a}$$



En vertu des formules d'addition d'arcs de la trigonométrie,

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = a(\cos(\varphi)\cos(\omega t) + \sin(\varphi)\sin(\omega t)) = a\cos(\omega t - \varphi)$$

§ 2.2 Equation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

Oscillateur mécanique amorti (non entretenu)

Equation différentielle

Forces:

$-k\,y$ = force de rappel du ressort;

k est appelé constante du ressort;

$-f\,v = -f\,y'$ = force de frottement dans le cas d'un écoulement laminaire

(c'est-à-dire sans turbulences); f est appelé *coefficient d'amortissement*.

En l'absence d'autres forces, selon la loi de Newton,

$$-k\,y - f\,y' = m\,y''$$

$$y'' + \frac{f}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner <u>deux</u> conditions initiales, la vitesse initiale et la position initiale:

$$y'(t_0) = v_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

Etude expérimentale qualitative

En l'absence de force de frottement ($f = 0$), une fois mise en mouvement, la masse oscillera perpétuellement selon un mouvement harmonique. On parle alors de mouvement périodique.

En présence d'une faible force de frottement (par rapport à la force de rappel), l'amplitude des oscillations décroît au fil du temps. On dit alors qu'on se trouve dans le cas des *oscillations amorties* (ou du mouvement pseudo-périodique).

Enfin, lorsque le frottement est important (par rapport à la force de rappel), la masse ne peut plus osciller. Lorsqu'on écarte la masse de la position d'équilibre, elle y retourne lentement, sans jamais la dépasser. On parle alors de *mouvement apériodique*.

La discussion de l'équation différentielle va aboutir à ces différents cas.

Oscillateur électrique amorti (non entretenu)

Equation différentielle

Dans un circuit RLC série, on a

$L\,I'$ =chute de tension aux bornes de la bobine;

$R\,I$ =chute de tension aux bornes de la résistance (amortissement);

$\frac{Q}{C}$ =chute de tension aux bornes du condensateur.

$$L\,I' + R\,I + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L\,Q'' + R\,Q' + \frac{Q}{C} = 0$$

$$Q'' + \frac{R}{L}\,Q' + \frac{1}{L\,C}\,Q = 0$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner deux conditions initiales, la vitesse initiale et la position initiale:

$$Q'(t_0) = I_0$$

$$Q(t_0) = Q_0$$

Etude expérimentale qualitative

En l'absence de résistance ($R = 0$), après la fermeture du circuit, la charge oscillera perpétuellement selon un mouvement harmonique. On parle alors de circuit à l'état périodique.

En présence d'une faible résistance, l'amplitude des oscillations décroît au fil du temps. On dit alors qu'on se trouve dans le cas des *oscillations amorties* (ou du mouvement pseudo-périodique).

Enfin, lorsque la résistance est grande, la charge ne peut plus osciller. A la fermeture du circuit, le condensateur se décharge lentement. On parle alors de *mouvement apériodique*.

La discussion de l'équation différentielle devra aboutir à ces différents cas.

Définitions

L'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est dite linéaire si elle est de la forme

$$y'' + 2\,p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$$

en d'autres termes, dans la forme générale ci-dessous, la fonction f est affine en y et en y'

$$y'' = f(t, y, y') \qquad \text{avec} \qquad f(t, y) = -2\,p(t)\,y' - q(t)\,y + g(t)$$

L'équation (différentielle ordinaire du deuxième ordre) linéaire est dite homogène si la fonction g est nulle:

$$y'' + 2\,p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

L'équation (différentielle ordinaire du deuxième ordre) linéaire est dite à coefficients constants si les fonctions p, q et g sont constantes

$$y'' + 2\,p\,y' + q\,y = g$$

En particulier, l'équation (différentielle ordinaire du deuxième ordre) suivante est linéaire homogène à coefficients constants si les fonctions p et q sont constantes

$$y'' + 2\,p\,y' + q\,y = 0$$

C'est le cas pour les deux exemples précédents avec, pour l'oscillateur mécanique non excité par une force extérieure

$$p = \frac{f}{2\,m}, \qquad q = \frac{k}{m}$$

et, pour l'oscillateur électrique non excité

$$p = \frac{R}{2\,L}, \qquad q = \frac{1}{L\,C}$$

Solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène

Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

$$y'' + 2\,p\,y' + q\,y = 0$$

dont on cherche la solution générale $y(t)$.

Principe de superposition

Le principe de superposition s'énonce comme suit :

* si $y(t)$ est solution, alors, pour toute constante c, la fonction $c\,y(t)$ est aussi solution;
* si $y_1(t)$, $y_2(t)$ sont deux solutions, alors la fonction $y_1(t) + y_2(t)$ est aussi solution.

La solution générale forme un espace vectoriel. Cet espace vectoriel est de dimension 2. En d'autres termes, l'ensemble des solutions est l'ensemble des multiples de deux solutions y_1, y_2 appelées solutions de base

$$\{y(t) \mid y(t) = c_1\,y_1(t) + c_2\,y_2(t),\ c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}\}$$

On dit aussi que la solution générale s'écrit avec deux paramètres.

Solution générale du cas apériodique : $p^2 > q$

Selon la proposition d'Euler (1739), cherchons les solutions réelles de la forme

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

où λ est une constante à déterminer. Remplaçons dans l'équation différentielle

$$\left(e^{\lambda t}\right)'' + 2\,p\,\left(e^{\lambda t}\right)' + q\,e^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda^2\,e^{\lambda t} + 2\,p\,\lambda\,e^{\lambda t} + q\,e^{\lambda t} = 0$$
$$\left(\lambda^2 + 2\,p\,\lambda + q\right)\,e^{\lambda t} = 0$$

λ doit être solution de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + 2\,p\,\lambda + q = 0$$

Dans le cas où le discriminant est positif

$$\Delta = (2\,p)^2 - 4\,q = 4\,\left(p^2 - q\right) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 > q$$

l'équation caractéristique possède deux solutions

$$\lambda_1 = \frac{-2\,p - \sqrt{4\,(p^2 - q)}}{2} = -p - \sqrt{p^2 - q}$$
$$\lambda_2 = -p + \sqrt{p^2 - q}$$

ce qui nous donne deux solutions de l'équation différentielle, appelées *solutions de base*

$$y_1(t) = e^{\left(-p-\sqrt{p^2-q}\right)t}$$
$$y_2(t) = e^{\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right)t}$$

La solution générale de l'équation différentielle est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux solutions

$$\boxed{y(t) = c_1\,e^{\left(-p-\sqrt{p^2-q}\right)t} + c_2\,e^{\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right)t}}, \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

Solutions de Mathematica

```
Clear[y, t, p, q]
```
efface

```
sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == 0}, y[t], t]
```
résous équation différentiel

$$\left\{\left\{y[t] \to e^{\left(-p-\sqrt{p^2-q}\right)t}\,C[1] + e^{\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right)t}\,C[2]\right\}\right\}$$

signifie que la solution générale est

$$y(t) = c_1\,e^{\left(-p-\sqrt{p^2-q}\right)t} + c_2\,e^{\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right)t} \qquad \text{où} \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

Remarques

Si le système est apériodique ($p^2 > q$), alors le système ne peut pas osciller et l'équation possède deux solutions réelles dont les formules sont données ci-dessus.

Si le système effectue des oscillations amorties ($p^2 < q$), la formule donnée par *Mathematica* demeure valide mais elle doit être interprétée comme une solution complexe. Nous donnerons les solutions réelles ci-après.

Si le système est à la limite d'apériodicité ($p^2 = q$), *Mathematica* ne donne qu'une solution; il en existe encore une autre que nous donnerons également ci-dessous.

Solution générale du cas des oscillations amorties : $p^2 < q$

Le circuit possède une *fréquence propre v*

$$\omega = \sqrt{q - p^2}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{q - p^2}}{2\pi}$$

La solution générale de l'équation différentielle est l'ensemble des combinaisons linéaires de deux solutions de base

$$\boxed{y(t) = e^{-p t} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))}, \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Pour une démonstration complète, consultez le document complémentaire suivant:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud//eq-differentielles/annexes/2-2-equadiff-suppl.pdf

Dans le cours, nous nous contentons de vérifier la solution donnée:

```
Clear[c1, c2]; ω = √(q - p²);
efface
y[t_] := e^(-p t) (c1 Cos[ω t] + c2 Sin[ω t])
                   cosinus      sinus
Simplify[y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t]]
simplifie
0
```

Il est aussi possible d'écrire la solution sous la forme suivante:

$$y(t) = a\, e^{-p t} \cos(\omega t - \psi) \qquad a \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

Solution générale du cas de la limite d'apériodicité : $p^2 = q$

La solution générale de l'équation différentielle est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux solutions

$$\boxed{y(t) = e^{-p t} (c_1 + c_2 t)}, \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Vérification:

```
Clear[c1, c2];
efface
y[t_] := e^(-p t) (c1 + c2 t)
Simplify[y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t]] /. q → p²
simplifie
0
```

On peut montrer que c'est le cas où le mobile revient le plus rapidement à la position de repos. Cette propriété est utilisée dans la construction des galvanomètres.

Solution de l'équation différentielle linéaire homogène avec conditions initiales

Cas apériodique

```
Clear[y, t, p, q, c1, c2];
```
efface

$$y[t\_] := c1\, e^{\left(-p-\sqrt{p^2-q}\right) t} + c2\, e^{\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right) t}$$

La donnée de conditions initiales $\{y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1\}$ détermine la valeur des constantes c_1 et c_2

```
Clear[t0, y0, y1];
```
efface

```
es = Solve[{y[t0] == y0, y'[t0] == y1}, {c1, c2}]
```
résous

$$\left\{\left\{c1 \to \frac{e^{-\left(-p-\sqrt{p^2-q}\right) t0} \left(-p\, y0 + \sqrt{p^2-q}\; y0 - y1\right)}{2\sqrt{p^2-q}},\ c2 \to \frac{e^{-\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right) t0} \left(p\, y0 + \sqrt{p^2-q}\; y0 + y1\right)}{2\sqrt{p^2-q}}\right\}\right\}$$

Voici donc la solution qui satisfait les conditions initiales

```
Simplify[y[t] /. es[[1]]]
```
simplifie

$$\frac{1}{2\sqrt{p^2-q}}\left(e^{-\left(p+\sqrt{p^2-q}\right) (t-t0)} \left(-p\, y0 + \sqrt{p^2-q}\; y0 - y1\right) + e^{\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right) (t-t0)} \left(p\, y0 + \sqrt{p^2-q}\; y0 + y1\right)\right)$$

Exemple numérique:

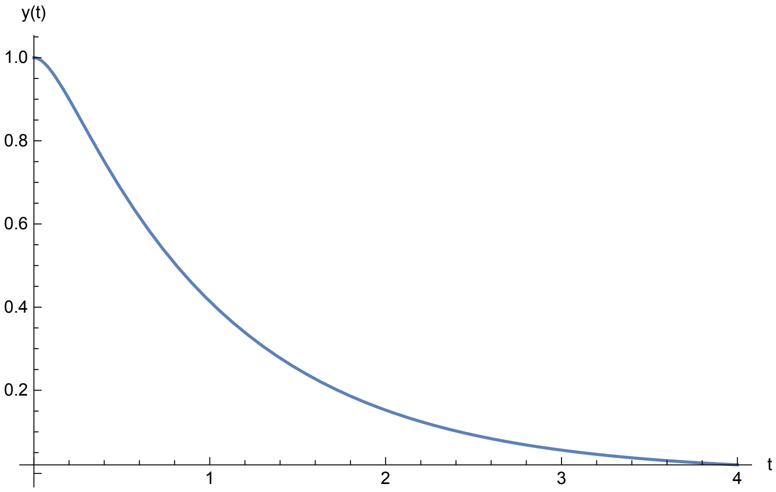
```
Clear[z];
```
efface

$$z[t\_] := \frac{1}{2\sqrt{p^2-q}} \left(E^{-\left(p+\sqrt{p^2-q}\right) (t-t0)} \left(-p\, y0 + \sqrt{p^2-q}\; y0 - y1\right) + E^{\left(-p+\sqrt{p^2-q}\right) (t-t0)} \left(p\, y0 + \sqrt{p^2-q}\; y0 + y1\right)\right) /.$$
$$\{p \to 5,\ q \to 9,\ t0 \to 0,\ y0 \to 1,\ y1 \to 0\}$$

```
z[t]
```

$$\frac{1}{8}\left(-e^{-9 t} + 9\, e^{-t}\right)$$

```
Plot[z[t], {t, 0, 4}, ImageSize → {400, 300}]
```
tracé de courbes　taille d'image



Dans ce cas, on dit que la force de frottement surcompense la force de rappel.

Cas des oscillations amorties

```
Clear[y, t, c1, c2]; ω = Sqrt[-p^2 + q];
```
efface

```
y[t_] := e^(-p t) (c1 Cos[ω t] + c2 Sin[ω t])
```
cosinus　sinus

La donnée de conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$ détermine la valeur des constantes c_1 et c_2

```
Clear[t0, y0, y1];
```
efface

```
es = Solve[{y[t0] == y0, y'[t0] == y1}, {c1, c2}]
```
résous

$$\left\{\left\{c1 \to \left(e^{p\,t0}\left(\sqrt{-p^2+q}\;y0\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right] - p\,y0\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right] - y1\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right]\right)\right) \Big/ \left(\sqrt{-p^2+q}\left(\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right]^2 + \mathrm{Sin}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right]^2\right)\right),\; c2 \to \left(e^{p\,t0}\left(\sqrt{-p^2+q}\;y0 + p\,y0\,\mathrm{Cot}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right] + y1\,\mathrm{Cot}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right]\right)\mathrm{Csc}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right]\right) \Big/ \left(\sqrt{-p^2+q}\left(1+\mathrm{Cot}\left[\sqrt{-p^2+q}\;t0\right]^2\right)\right)\right\}\right\}$$

Voici donc la solution qui satisfait les conditions initiales :

```
Simplify[y[t] /. es[[1]]]
```
simplifie

$$e^{p\,(-t+t0)}\left(y0\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-p^2+q}\;(t-t0)\right] + \frac{(p\,y0+y1)\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-p^2+q}\;(t-t0)\right]}{\sqrt{-p^2+q}}\right)$$

c'est-à-dire

$$y(t) = \frac{1}{\omega} e^{p(-t+t0)} (\omega\, y0 \operatorname{Cos}[\omega (t - t0)] + (p\, y0 + y1) \operatorname{Sin}[\omega (t - t0)])$$

Exemple numérique:

```
Clear[z];
```
efface

$$z[t\_] := \frac{1}{\sqrt{-p^2+q}} \left(E^{p(-t+t0)} \left(\sqrt{-p^2+q}\; y0 \operatorname{Cos}\left[\sqrt{-p^2+q}\; (t - t0)\right] + (p\, y0 + y1) \operatorname{Sin}\left[\sqrt{-p^2+q}\; (t - t0)\right]\right)\right) /.$$

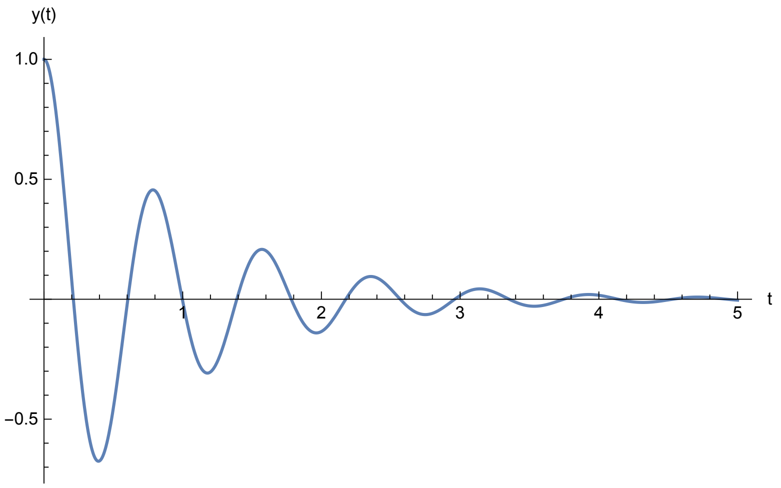
cosinus sinus

$$\{p \to 1, q \to 65, t0 \to 0, y0 \to 1, y1 \to 0\}$$

```
z[t]
```

$$\frac{1}{8} e^{-t} (8 \operatorname{Cos}[8 t] + \operatorname{Sin}[8 t])$$

```
Plot[z[t], {t, 0, 5}, PlotRange → All, ImageSize → {400, 300}]
```
tracé de courbes zone de tracé tout taille d'image



Cas de la limite d'apériodicité

```
Clear[y, t, c1, c2];
```
efface

$$y[t\_] := e^{-p t} (c1 + c2\, t)$$

La donnée de conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$ détermine la valeur des constantes c_1 et c_2

```
Clear[t0, y0, y1];
```
efface

```
es = Solve[{y[t0] == y0, y'[t0] == y1}, {c1, c2}]
```
résous

$$\{\{c1 \to -e^{p\, t0} (-y0 + p\, t0\, y0 + t0\, y1),\ c2 \to e^{p\, t0} (p\, y0 + y1)\}\}$$

Voici donc la solution qui satisfait les conditions initiales :

```
Simplify[y[t] /. es[[1]]]
simplifie
```

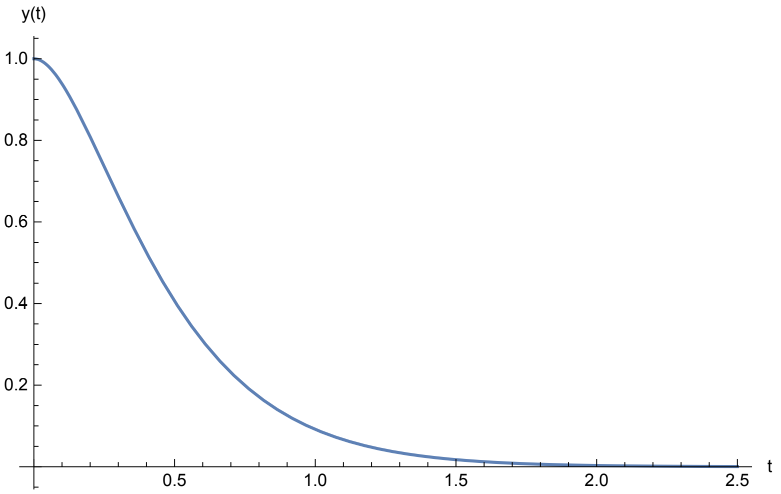
$e^{p(-t+t0)} (y0 + p(t - t0) y0 + (t - t0) y1)$

Exemple numérique:

```
Clear[z];
efface
z[t_] :=
 E^(p (-t+t0)) (y0 + p t y0 - p t0 y0 + t y1 - t0 y1) /. {p → 4, q → 16, t0 → 0, y0 → 1, y1 → 0}
z[t]
```

$e^{-4t} (1 + 4t)$

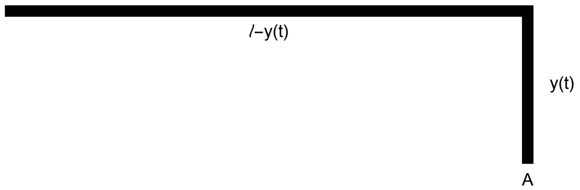
```
Plot[z[t], {t, 0, 2.5}, PlotRange → All, ImageSize → {400, 300}]
tracé de courbes            zone de tracé  tout  taille d'image
```



Travaux dirigés du § 2.2

2.2- TD 1 Glissement d'une corde sans frottement

Une corde de longueur l se trouve dans la situation initiale suivante: une partie de longueur $l - y_0$ est posée horizontalement sur un toit tandis qu'une longueur y_0 pend dans le vide. A l'instant $t = 0$, on la lâche et, sous l'effet de la pesanteur, elle se met à glisser:



Nous négligeons les frottements. Pour décrire la position de la corde, on choisit la position $y(t)$ de son extrémité A. Établissons l'équation différentielle.

La force qui s'exerce sur la corde est la force de pesanteur qui s'exerce sur la partie qui pend.

Notons *m* la masse totale de la corde. La pesanteur vaut

$$F = \frac{y}{\ell} m g$$

L'équation de Newton

$$F = m y''$$

conduit à l'équation différentielle avec conditions initiales

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' - \frac{g}{\ell} y = 0 \\ y(0) = y_0; \quad y'(0) = 0 \end{array}}$$

a) Résolvez l'équation différentielle avec conditions initiales.

b) Application numérique : on donne $l = 4\,m$, $y_0 = 1\,m$.
Combien de temps dure le glissement ?
Quelle est la vitesse à la fin du glissement ?

2.2- TD 2 Circuit RCL non entretenu

a) A partir des lois de la physique, expliquez comment on arrive à l'équation différentielle du circuit RCL série non entretenu

$$L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = 0$$

b) A quelle condition une oscillation amortie se produit-elle ?
Quelle est alors sa fréquence propre ?

c) En partant du cours, écrivez la solution générale de l'équation différentielle.

§ 2.3 Equations différentielles linéaires inhomogènes

Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire inhomogène avec conditions initiales

$$\begin{cases} y'' + 2 p y' + q y = g(t) \\ y(t_0) = y_0; \; y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

dans le cas où p et q sont des constantes et g est une sinusoïde $g(t) = g_0 \sin(\Omega t)$

Principe de superposition

Au lieu de chercher d'emblée l'ensemble des solutions de l'équation inhomogène y_{inh}, il suffit d'en déterminer une, n'importe laquelle, indépendamment de toute condition initiale, que nous appelons solution particulière et notons y_{part}. A partir de là, il est facile de construire la solution générale y_{inh}. En effet, on a

$$(y_{inh})'' + 2 p (y_{inh})' + q y_{inh} = g$$
$$(y_{part})'' + 2 p (y_{part})' + q y_{part} = g$$
$$(y_{inh} - y_{part})'' + 2 p (y_{inh} - y_{part})' + q (y_{inh} - y_{part}) = 0$$

La différence entre deux solutions de l'équation inhomogène est solution de l'équation homogène associée $y'' + 2 p y' + q y = 0$ dont la solution générale est notée y_{hom}.

$$y_{hom} = y_{inh} - y_{part}$$

$$y_{inh} = y_{hom} + y_{part}$$

$$y_{inh} = y_{hom} + y_{part}$$

En mots: la solution générale de l'équation inhomogène s'obtient en additionnant

* la solution générale de l'équation homogène associée
* une solution particulière de l'équation inhomogène.

1-ère étape : solution générale de l'équation homogène

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'' + 2\,p\,y' + q\,y = 0$ dont la solution générale est

$$y_{hom}(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t), \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

et où y_1, y_2 sont les deux fonctions de base qui ont été données dans le § 2.2. Leur forme explicite dépend du signe du discriminant $\left(p^2 - q\right)$ de l'équation caractéristique.

2-ème étape : une solution particulière inhomogène

On cherche une solution particulière de l'équation inhomogène, n'importe laquelle, sans se préoccuper de la condition initiale. Dans notre situation, cherchons s'il existe une solution y_{part} qui serait une fonction sinusoïdale de même fréquence que l'excitation. Nous admettons cependant qu'elle puissse être déphasée par rapport à l'excitation.

Première forme

$$(y_{part})'' + 2\,p\,(y_{part})' + q\,y_{part} = g_0 \sin(\Omega\, t)$$

où, pour tenir compte d'un éventuel déphasage, $y_{part}(t) = a_1 \sin(\Omega\, t) + a_2 \cos(\Omega\, t)$

$$\left(-\Omega^2 a_1 \sin(\Omega\, t) - \Omega^2 a_2 \cos(\Omega\, t)\right) + 2\,p\,(\Omega\, a_1 \cos(\Omega\, t) - \Omega\, a_2 \sin(\Omega\, t)) + q\,(a_1 \sin(\Omega\, t) + a_2 \cos(\Omega\, t)) = g_0 \sin(\Omega\, t)$$

$$\left(-\Omega^2 a_1 - 2\,p\,\Omega\, a_2 + q\,a_1 - g_0\right) \sin(\Omega\, t) + \left(-\Omega^2 a_2 + 2\,p\,\Omega\, a_1 + q\,a_2\right) \cos(\Omega\, t) = 0$$

p, q, g_0 et Ω étant donnés, nous déterminons maintenant les nombres a_1, a_2 tels que l'égalité précédente soit vérifiée à tous les instants t :

$$\begin{cases} -\Omega^2 a_1 - 2\,p\,\Omega\, a_2 + q\,a_1 - g_0 = 0 \\ -\Omega^2 a_2 + 2\,p\,\Omega\, a_1 + q\,a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (q - \Omega^2)\, a_1 + (-2\,p\,\Omega)\, a_2 = g_0 \\ (2\,p\,\Omega)\, a_1 + (q - \Omega^2)\, a_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations linéaires à deux inconnues a pour solution

$$a_1 = \frac{(q - \Omega^2)\, g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2\,p\,\Omega)^2}, \qquad a_2 = \frac{-2\,p\,\Omega\, g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2\,p\,\Omega)^2}$$

Finalement, une solution particulière est

$$y_{part}(t) = \frac{(q - \Omega^2)\, g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2\,p\,\Omega)^2} \sin(\Omega\, t) - \frac{2\,p\,\Omega\, g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2\,p\,\Omega)^2} \cos(\Omega\, t)$$

Deuxième forme

Le résultat précédent peut se récrire sous la forme

$$y_{part}(t) = a \sin(\Omega t - \varphi) \quad \text{où} \quad a = \text{amplitude de l'oscillation et}$$
$$\varphi = \text{déphasage de l'oscillation par rapport à l'excitation}$$

Pour ce faire, calculons les coordonnées polaires (a, φ) du vecteur suivant

$$\begin{pmatrix} \frac{(q-\Omega^2)\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2} \\ \frac{2\, p\, \Omega\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

a est la norme du vecteur. Nous supposons que $g_0 > 0$.

$$a = \sqrt{\left(\frac{(q-\Omega^2)\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}\right)^2 + \left(\frac{2\, p\, \Omega\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}\right)^2} = \frac{g_0}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}}$$

φ désigne l'angle entre les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{(q-\Omega^2)\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2} \\ \frac{2\, p\, \Omega\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2} \end{pmatrix}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\frac{(q-\Omega^2)\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}}{a} = \frac{q-\Omega^2}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\frac{2\, p\, \Omega\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}}{a} = \frac{2\, p\, \Omega}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}}$$

Si on suppose $p > 0$ et $\Omega > 0$, le déphasage peut s'écrire

$$\varphi = \arccos\left(\frac{q-\Omega^2}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}}\right)$$

En utilisant la relation trigonométrique

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

la solution peut être récrite sous une autre forme :

$$y_{part}(t) = \frac{(q-\Omega^2)\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2} \sin(\Omega t) - \frac{2\, p\, \Omega\, g_0}{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2} \cos(\Omega t) =$$
$$(a \cos(\varphi)) \sin(\Omega t) - (a \sin(\varphi)) \cos(\Omega t) =$$
$$a (\sin(\Omega t) \cos(\varphi) - \cos(\Omega t) \sin(\varphi)) = a \sin(\Omega t - \varphi)$$

Finalement, une solution particulière est

$$y_{part}(t) = \frac{g_0}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}} \sin\left(\Omega t - \arccos\left(\frac{q-\Omega^2}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2 + (2\, p\, \Omega)^2}}\right)\right)$$

Pour des données numériques, une vérification de cette dernière formule par *Mathematica* a été effectuée dans le § 2 – 1.

<u>Autre méthode de calcul</u>

Il est possible d'alléger les calculs précédents en faisant appel aux propriétés des nombres complexes. Consultez la partie S1 du document complémentaire suivant:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud//eq-differentielles/annexes/2-3-equadiff-suppl.pdf

3-ème étape : solution générale de l'équation inhomogène

D'après un théorème précédent, la solution générale de l'équation inhomogène est de la forme

$$y_{inh} = y_{hom} + y_{part} = c_1\, y_1\,(t) + c_2\, y_2\,(t) + a \sin(\Omega\, t - \varphi), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

où l'expression $c_1\, y_1\,(t) + c_2\, y_2\,(t)$ est définie dans le § 2.2 et $a \sin(\Omega\, t - \varphi)$ est définie ci-dessus.

La solution générale contient toutes les solutions de l'équation différentielle inhomogène sans se préoccuper des conditions initiales. Un exemple numérique explicite est donné dans la partie S2 du document complémentaire suivant:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud//eq-differentielles/annexes/2-3-equadiff-suppl.pdf

4-ème étape : la solution de l'équation inhomogène qui satisfait les conditions initiales

Pour chaque paire de conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, on peut calculer la valeur des constantes d'intégrations c_1, c_2. Il s'agit simplement de résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Pour alléger notre tâche, utilisons *Mathematica*

$$y_{inh} = c_1\, y_1\,(t) + c_2\, y_2\,(t) + a \sin(\Omega\, t - \varphi)$$

Oscillations amorties et entretenues avec conditions initiales, cas $p^2 < q$

$$\omega = \sqrt{q - p^2}$$

$$y\,(t) = e^{-p\,t}\,(c_1 \cos(\omega\, t) + c_2 \sin(\omega\, t)) + a \sin(\Omega\, t - \varphi)$$

Exemple numérique

```
p = 2; q = 5; Ω = 2; g0 = 3; y0 = 0; y1 = 0;
Clear[g]; g[t_] := g0 Sin[Ω t]
efface               sinus

Clear[ c1, c2];
efface

ω = Sqrt[q - p^2];

yp[t_] := g0/Sqrt[(q - Ω^2)^2 + (2 p Ω)^2] Sin[Ω t - ArcCos[(q - Ω^2)/Sqrt[(q - Ω^2)^2 + (2 p Ω)^2]]];
                                          sinus        arc cosinus

y[t_] := e^(-p t) (c1 Cos[ω t] + c2 Sin[ω t]) + yp[t];
                      cosinus        sinus

y[t]
```

$$e^{-2\,t}\,(c1\, \text{Cos}[t] + c2\, \text{Sin}[t]) + \frac{3\, \text{Sin}\left[2\, t - \text{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{65}}\right]\right]}{\sqrt{65}}$$

```
cc12 = Solve[{y[0] == y0, y'[0] == y1}, {c1, c2}]
        résous
```

$\{\{c1 \to \frac{24}{65}, c2 \to \frac{42}{65}\}\}$

```
ys[t_] := y[t] /. cc12[[1]];
ys[t]
```

$$e^{-2t}\left(\frac{24\,\text{Cos}[t]}{65} + \frac{42\,\text{Sin}[t]}{65}\right) + \frac{3\,\text{Sin}\left[2t - \text{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{65}}\right]\right]}{\sqrt{65}}$$

Vérification

```
FullSimplify[ys''[t] + 2 p ys'[t] + q ys[t] - g[t]]
simplifie complètement
```

0

```
Simplify[ys[0]]
simplifie
```

0

```
Simplify[ys'[0]]
simplifie
```

0

Travaux dirigés du § 2.3

2.3- TD 1

Une masse m est attachée à un ressort de raideur k et libre de se déplacer verticalement. On identifie l'extrémité libre du ressort et la position de la masse. Au repos, la masse se trouve en $y = 0$. On amène cette masse en $y = y_0$ et, au temps $t = 0$, on lâche le système sans vitesse initiale. On néglige la résistance de l'air au déplacement ainsi que la masse du ressort.

a) Etablir l'équation différentielle de la position $y(t)$ de cette masse.

b) Résoudre l'équation différentielle avec la méthode donnée dans le cours.
Indication: chercher s'il existe une solution réelle de la forme $y(t) = ...$

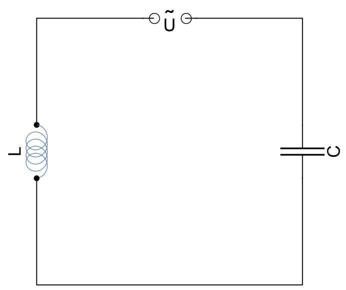
c) [Facultatif] Résoudre l'équation différentielle avec la méthode donnée dans la partie S1 du supplément

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud//eq-differentielles/annexes/2-2-equadiff-suppl.pdf

qui fait appel aux nombres complexes.

2.3- TD 2 Oscillations entretenues non amorties ($p = 0$)

On considère le circuit (idéalisé) LC entretenu par une tension du type $U(t) = \hat{U} \sin(\Omega\, t)$.



a) Etablir l'équation différentielle de l'intensité $I(t)$.

b) Résoudre l'équation différentielle établie en *a)* avec les conditions initiales
$I(0) = I_0$ et $I'(0) = I_1$ au moyen de la méthode donnée dans le cours.
Donner une représentation graphique de $I(t)$ pour
$L = 100\,H$, $C = 10^{-4}\,F$, $\Omega = 0.1\,s^{-1}$, $\hat{U} = 3000\,V$, $I_0 = 0$ et $I_1 = 1\,\frac{A}{s}$.

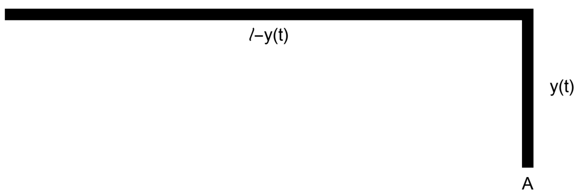
c) [Facultatif] Résoudre l'équation différentielle établie en *a)* avec les conditions initiales
$I(0) = I_0$ et $I'(0) = I_1$ au moyen de la méthode donnée dans la partie S1 du supplément

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud//eq-differentielles/annexes/2-2-equadiff-suppl.pdf

qui fait appel aux nombres complexes.

2.3- TD 3 Glissement d'une corde avec frottement

Une corde de longueur l se trouve dans la situation initiale suivante: une partie de longueur $l - y_0$ est posée horizontalement sur un toit tandis qu'une longueur y_0 pend dans le vide. A l'instant $t = 0$, on la lâche et, sous l'effet de la pesanteur, elle se met à glisser:



Nous tenons compte du frottement de la partie horizontale sur le toit. On donne le coefficient de frottement de glissement μ. Établissons l'équation différentielle.

La force qui s'exerce sur la corde est la force de pesanteur qui s'exerce sur la partie qui pend. Notons m la masse totale de la corde. La pesanteur vaut

$$F_1 = \frac{y}{\ell}\, m\, g$$

La force de frottement est égale à μ fois le poids de la partie horizontale

$$F_2 = -\mu\, \frac{\ell - y}{\ell}\, m\, g$$

L'équation de Newton

$$F_1 + F_2 = m\, y''$$

conduit à l'équation différentielle avec conditions initiales

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' - \dfrac{(1+\mu)\,g}{\ell}\,y = -\mu\,g \\ y(0) = y_0; \quad y'(0) = 0 \end{array}}$$

Résolvez l'équation différentielle avec conditions initiales.

Indication : l'équation différentielle possède une solution particulière constante.

2.3- TD 4 Circuit RCL entretenu

a) A partir des lois de la physique, expliquez pourquoi l'équation différentielle du circuit RCL série entretenu est

$$L\,I'' + R\,I' + \frac{1}{C}\,I = \Omega\,U_0 \cos(\Omega\,t)$$

Ω désigne ici la fréquence du générateur.

b) [Avec *Mathematica*] Montrez que l'équation différentielle admet la solution particulière stationnaire suivante

$$I_\infty(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \left(\frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \cos(\Omega\,t) + \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \sin(\Omega\,t) \right)$$

Liens

Vers les corrigés des exercices:

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/eq-differentielles/2-equadiff-cor.pdf

Vers la page mère : Applications des mathématiques

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html