Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Systèmes d’équations linéaires § 2 Systèmes singuliers
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/systemes_lineaires/2-syslin_sing.pdf

Corrigé de l'exercice 2-1 P 14 a)

Comme aucune droite verticale ne peut être solution, on peut écrire l'équation de la droite sous la forme y = m x + p avec deux coefficients inconnus *m* et *p*.

$$\begin{aligned} 2m + p &= 1 \\ 8m + p &= 3.5 \\ 12m + p &= 5 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de 3 équations à 2 inconnues.

Corrigé de l'exercice 2-1 P 14 b)

$$\begin{aligned} 2m + p &= 1 \\ 8m + p &= 3.4 \\ 12m + p &= 5 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2-1 P 15

Tout polynôme de degré ≤ 2 est de la forme $y = a\,x^2 + b\,x + c$ où a, b, c sont trois coefficients inconnus.

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 1 \\ 36a + 6b + c &= -1 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de 2 équations à 3 inconnues.

Corrigé de l'exercice 2-1 P 16

Pour être équilibrée en Ca, respectivement en H, en P et en O, on doit avoir

$$\begin{aligned} \alpha &= 3\gamma \\ 3\beta &= 2\delta \\ \beta &= 2\gamma \\ 4\beta &= 8\gamma \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues. Le système est singulier car les deux dernières équations sont équivalentes. A ce système linéaire, il faut encore ajouter les conditions suivantes :

$$\alpha \in \mathbb{N}^*,\ \beta \in \mathbb{N}^*,\ \gamma \in \mathbb{N}^*,\ \delta \in \mathbb{N}^*,$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \quad \text{minimaux}$$

Corrigé de l'exercice 2-1 P 17

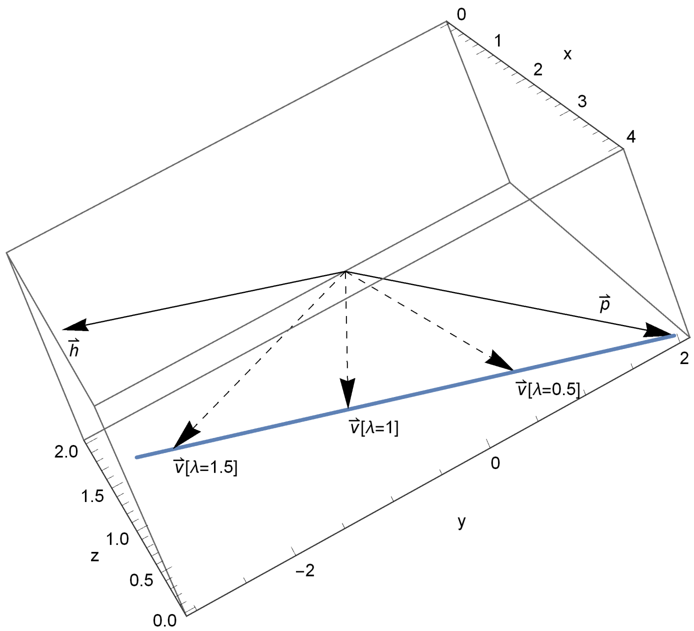
La composante ombre du vecteur $\vec{v}$ est $\vec{p}$.

L'autre composante du vecteur $\vec{v}$ est

$\lambda\,\vec{h}$ car elle est parallèle au vecteur qui pointe vers le soleil.

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

Donc $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \vec{h}$



En composantes

$$x = 4$$
$$y = 2 - 3\lambda$$
$$z = \lambda$$

A ce système linéaire de 3 équations à 4 inconnues, il faut encore ajouter la condition

$$\lambda \geq 0$$

Corrigé de l'exercice 2-1 P 18

c = chiffre des centaines, d = chiffre des dizaines, u = chiffre des unités,
nombre cherché = 100 c + 10 d + u

$$100\,d + 10\,c + u = 100\,c + 10\,d + u + 270$$
$$100\,u + 10\,d + c = 100\,c + 10\,d + u - 99$$

A ce système linéaire de 2 équations à 3 inconnues, il faut encore ajouter les conditions

$$c,\ d,\ u \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Corrigé de l'exercice 2-1 P 19

$$m_1 + m_2 + m_3 = 4500$$
$$0.750\, m_1 + 0.840\, m_2 + 0.920\, m_3 = 4500 * 0.890$$

A ce système linéaire de 2 équations à 3 inconnues, il faut encore ajouter les conditions

$$m_1 \geq 0,\ m_2 \geq 0,\ m_3 \geq 0$$

Corrigé de l'exercice 2-1 P 20

Les inconnues sont d = distance AB et v_2 = vitesse du deuxième train.

$$\frac{\frac{d}{2}+15}{100} = \frac{\frac{d}{2}-15}{v_2}$$

A ce système d'une équation à deux inconnues, il faut ajouter les conditions

$$d > 30, \qquad 0 < v_2 < 100$$

Corrigé de l'exercice 2-1 P 21

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 100 \\ a_1 + a_2 &= 70 \\ a_3 &= \frac{a_1 + a_2}{2} \end{aligned}$$

Lors de la résolution du système, on pourra se rendre compte qu'il n'est pas régulier (voir exercice 2-2 P 21).

Corrigé de l'exercice 2-2 P 14 a)

$$\begin{aligned} \boxed{2\,m} + p &= 1 \\ 8\,m + p &= 3.5 \\ 12\,m + p &= 5 \end{aligned}$$

Il est avantageux de permuter les colonnes

$$\begin{array}{llll} p + 2\,m = 1 & \times(-1) & \times(-1) \\ p + 8\,m = 3.5 & \times 1 & \\ p + 12\,m = 5 & & \times 1 \end{array}$$

Eliminons d'abord dans la première colonne

$$\begin{array}{ll} \boxed{p} + 2\,m = 1 & \\ \boxed{6\,m} = 2.5 & \times(-5) \\ 10\,m = 4 & \times 3 \end{array}$$

Eliminons dans la deuxième colonne

$$\begin{aligned} \boxed{p} + 2\,m &= 1 \\ \boxed{6\,m} &= 2.5 \\ 0\,m &= -0.5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est vide

$$S = \emptyset$$

Corrigé de l'exercice 2-2 P 14 b)

$$\begin{aligned} \boxed{2\,m} + p &= 1 \\ 8\,m + p &= 3.4 \\ 12\,m + p &= 5 \end{aligned}$$

Il est avantageux de permuter les colonnes

$$\begin{array}{llll} p + 2\,m = 1 & \times(-1) & \times(-1) \\ p + 8\,m = 3.4 & \times 1 & \\ p + 12\,m = 5 & & \times 1 \end{array}$$

Eliminons d'abord dans la première colonne

$$\begin{aligned} \boxed{p} + 2m &= 1 \\ \boxed{6m} &= 2.4 \quad \times(-5) \\ 10m &= 4 \quad \times 3 \end{aligned}$$

Eliminons dans la deuxième colonne

$$\begin{aligned} \boxed{p} + 2m &= 1 \\ \boxed{6m} &= 2.4 \\ 0m &= 0 \end{aligned}$$

Le système est triangulaire.

$$m = \frac{2.4}{6} = 0.4$$

$$p = 1 - 2m = 0.2$$

Le système possède une et une seule solution. L'équation de la droite est

$$y = 0.4x + 0.2$$

Corrigé de l'exercice 2-2 P 15

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 1 \\ 36a + 6b + c &= -1 \end{aligned}$$

Il est avantageux de permuter les colonnes

$$\begin{aligned} \boxed{c} + 2b + 4a &= 1 \quad \times(-1) \\ c + 6b + 36a &= -1 \quad \times 1 \end{aligned}$$

Eliminons dans la première colonne

$$\begin{aligned} \boxed{c} + 2b + 4a &= 1 \\ 4b + 32a &= -2 \end{aligned}$$

On obtient un système triangulaire

$$\begin{aligned} \boxed{c} + 2b + 4a &= 1 \\ \boxed{2b} + 16a &= -1 \end{aligned}$$

On peut choisir librement la valeur de a, disons

$$a = m, \qquad m \in \mathbb{R} \qquad (m \text{ est un paramètre})$$

puis calculer b et c (en fonction de m)

$$b = \frac{-1 - 16a}{2} = \frac{-1 - 16m}{2} = -\frac{1}{2} - 8m$$

$$c = 1 - 4a - 2b = 1 - 4m - 2\left(-\frac{1}{2} - 8m\right) = 2 + 12m$$

L'ensemble des solutions du système linéaire peut s'écrire sous la forme paramétrique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ -\frac{1}{2} - 8m \\ 2 + 12m \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}$$

Finalement, l'ensemble des solutions du problème se présente sous la forme d'une famille de courbes

$$f_m(x) = m\,x^2 + \left(-\frac{1}{2} - 8\,m\right) x + (2 + 12\,m)$$

m est le paramètre de la famille : pour chaque valeur de m, on a une courbe $y = f_m(x)$.

Corrigé de l'exercice 2-2 P 16

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\alpha} & & -3\,\gamma & & = 0 \\
& 3\,\beta & & -2\,\delta & = 0 \\
& \beta & -2\,\gamma & & = 0 \\
& 4\,\beta & -8\,\gamma & & = 0
\end{array}$$

Le système étant creux, il est avantageux de permuter les colonnes

$$\begin{array}{cccccl}
\boxed{\alpha} & & & -3\,\gamma & = 0 & \\
& \boxed{-2\,\delta} & +\,3\,\beta & & = 0 & \\
& & \boxed{\beta} & -2\,\gamma & = 0 & \times(-4) \\
& & 4\,\beta & -\,8\,\gamma & = 0 & \times 1
\end{array}$$

Eliminons dans la troisième colonne

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\alpha} & & & -3\,\gamma & = 0 \\
& \boxed{-2\,\delta} & +\,3\,\beta & & = 0 \\
& & \boxed{\beta} & -2\,\gamma & = 0 \\
& & & \boxed{0\,\gamma} & = 0
\end{array}$$

On peut choisir librement γ, disons

$$\gamma = t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (t \text{ est un paramètre})$$

puis on calcule β, δ, α (en fonction de t)

$$\beta = 2\,\gamma = 2\,t$$
$$\delta = \frac{3\,\beta}{2} = \frac{6\,t}{2} = 3\,t$$
$$\alpha = 3\,\gamma = 3\,t$$

La solution du système linéaire peut s'écrire sous la forme paramétrique

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,t \\ 2\,t \\ t \\ 3\,t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Les autres conditions

α, β, γ, δ doivent être entiers positifs donc t doit être entier positif;

α, β, γ, δ doivent être minimaux donc t = 1

conduisent à

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3$$

Corrigé de l'exercice 2-2 P 17

Il suffit de remarquer que le système d'équations se présente déjà sous la forme paramétrique: pour chaque valeur de $\lambda \in [0; \infty[$, on peut calculer le vecteur $\vec{v}$ correspondant.

Corrigé de l'exercice 2-2 P 18

$$100\,d + 10\,c + u = 100\,c + 10\,d + u + 270$$
$$100\,u + 10\,d + c = 100\,c + 10\,d + u - 99$$

Réduisons d'abord les termes semblables

$$\begin{array}{rrrl} -90\,c & +90\,d & & = 270 \\ -99\,c & & +99\,u & = -99 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{rrrl} -c & +d & & = 3 \\ -c & & +u & = -1 \end{array}$$

Le système étant creux, il est avantageux de permuter les lignes et les colonnes:

$$\begin{array}{rrrl} \boxed{u} & & -c & = -1 \\ & \boxed{d} & -c & = 3 \end{array}$$

Le système est triangulaire. On peut choisir librement c, disons

$$c = t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (t \text{ est un paramètre})$$

puis calculer d et u (en fonction de t)

$$d = 3 + c = 3 + t$$
$$u = -1 + c = -1 + t$$

Ecrivons la solution du système linéaire sous la forme paramétrique

$$\begin{pmatrix} c \\ d \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3+t \\ -1+t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Il faut encore tenir compte des conditions supplémentaires

$t \in \mathbb{N}$, $(3+t) \in \mathbb{N}$, $(-1+t) \in \mathbb{N}$,

$0 \leq t \leq 9$, $0 \leq 3+t \leq 9$, $0 \leq -1+t \leq 9$

qui peuvent se récrire plus simplement

$$t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Finalement, le problème possède 6 solutions

$$S = \{140, 251, 362, 473, 584, 695\}$$

Corrigé de l'exercice 2-2 P 19

$$\begin{array}{rrrll} \boxed{m_1} & +m_2 & +m_3 & = 4500 & \mid \times (-0.75) \\ 0.75\,m_1 & +0.84\,m_2 & +0.92\,m_3 & = 4005 & \mid \times 1 \end{array}$$

Eliminons dans la première colonne

$$\begin{array}{rrrl} \boxed{m_1} & +m_2 & +m_3 & = 4500 \\ & \boxed{0.09\,m_2} & +0.17\,m_3 & = 630 \end{array}$$

Le système obtenu est triangulaire. On peut choisir librement la valeur de m_3, disons

$$m_3 = t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (t \text{ est un paramètre})$$

puis calculer m_2 et m_1 (en fonction de t)

$$m_2 = \frac{630 - 0.17\,t}{0.09} = 7000 - \frac{17}{9}\,t$$

$$m_1 = 4500 - m_3 - m_2 = 4500 - t - \left(7000 - \frac{17}{9}t\right) = -2500 + \frac{8}{9}t$$

L'ensemble des solutions du système linéaire peut s'écrire sous la forme paramétrique

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Il faut encore tenir compte des conditions supplémentaires

$-2500 + \frac{8}{9}t \geq 0 \Longleftrightarrow t \geq 2812.5$

$7000 - \frac{17}{9}t \geq 0 \Longleftrightarrow t \leq 3705.882$

L'ensemble des solutions du problème peut s'écrire sous la forme paramétrique

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad t \in [2812.5;\ 3705.882]$$

Par exemple, pour t = 2880, on a

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 1560 \\ 2880 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2-2 P 20

$$\frac{\frac{d}{2} + 15}{100} = \frac{\frac{d}{2} - 15}{v_2}$$

c'est-à-dire

$$v_2 \left(\frac{d}{2} + 15\right) = 100 \left(\frac{d}{2} - 15\right)$$

Attention : le système n'est pas linéaire. Ce problème est un "corps étranger" dans ce chapitre !

On peut choisir librement $d \in]30;\ \infty[$, puis calculer v_2

$$v_2 = \frac{100\left(\frac{d}{2} - 15\right)}{\frac{d}{2} + 15} = 100\,\frac{d - 30}{d + 30}, \qquad d \in \left]30;\ \infty\right[$$

Corrigé de l'exercice 2-2 P 21

$$\begin{array}{lllll} \boxed{a_1} + a_2 + a_3 & = 100 & & \times 1 & \times 1 \\ a_1 + a_2 & = 70 & \times(-1) & & \\ a_1 + a_2 - 2\,a_3 & = 0 & & & \times(-1) \end{array}$$

Eliminons dans la première colonne

$$\begin{array}{lll} \boxed{a_1} + a_2 + a_3 & = 100 & \\ \quad \boxed{0\,a_2} + a_3 & = 30 & \times(-3) \\ \qquad \boxed{3\,a_3} & = 100 & \times 1 \end{array}$$

La forme triangulaire est atteinte mais un terme diagonal est nul. Résolvons le système

$$a_3 = \frac{100}{3}$$

Remplaçons dans la deuxième équation

$$0\, a_2 + \frac{100}{3} = 30$$

L'ensemble des solutions est vide

$$S = \emptyset$$

Corrigé de l'exercice 2-3 - 1

L'ensemble des solutions du premier système est une droite Δ qui est l'intersection de deux plans.
L'ensemble des solutions du deuxième système est un plan Π.
Toute solution du premier système est solution du deuxième système (la droite Δ est dans le plan Π).
La réciproque est fausse; ainsi, (x, y, z) = (1; 0; 1) est solution du deuxième système mais n'est pas solution du premier système.
Le but de cet exercice est de prendre conscience que les deux systèmes ne sont pas équivalents.

Corrigé de l'exercice 2-3 - 2

Le système homogène associé est

$$\begin{array}{llll} x & +y & & = 0 \\ x & -3y & +2z & = 0 \end{array}$$

(x, y, z) = (1; -1; -2) est une solution particulière de ce système

$$\begin{array}{llll} 1 & +(-1) & & = 0 \\ 1 & -3(-1) & +2(-2) & = 0 \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{lllll} 1 & +(-1) & & = 0 & \vert \times t \\ 1 & -3(-1) & +2(-2) & = 0 & \vert \times t \end{array}$$

Quelle que soit la valeur du paramètre t,

$$\begin{array}{llll} t & +(-t) & & = 0 \\ t & -3(-t) & +2(-2t) & = 0 \end{array}$$

Donc (x, y, z) = (t; -t; -2 t) est aussi solution du système.

<u>Commentaire</u>:
Il n'est pas possible qu'un système linéaire possède exactement deux solutions

$$\{0, 0, 0\}, \qquad \{1, -1, -2\}$$

Nous venons de voir que, s'il possède deux solutions distinctes, alors il possède obligatoirement une infinité de solutions.

Corrigé de l'exercice 2-3 - 3

Le système homogène associé est

$$x \; -3y \; +2z \; = 0$$

(x, y, z) = (3; 1; 0) est une solution particulière de ce système

$$3 \; -3*1 \; +2*0 \; = 0$$

(x, y, z) = (-2; 0; 1) est autre solution particulière

$$(-2) \; -3*0 \; +2*1 \; = 0$$

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{lllll} 3 & -3*1 & +2*0 & =0 & \mid \times s \\ (-2) & -3*0 & +2*1 & =0 & \mid \times t \end{array}$$

Quelles que soient les valeurs des paramètres, on a

$$\begin{array}{llll} 3s & -3*s & +2*0 & =0 \\ (-2t) & -3*0 & +2*t & =0 \end{array}$$

En additionnant, il vient

$$(3s-2t)-3*(s)+2*(t)=0$$

Il s'ensuit que (x, y, z) = (3 s-2 t; s; t) est aussi solution.

Commentaire:

Il n'est pas possible qu'un système linéaire possède exactement trois solutions

$$\{0;\ 0;\ 0\}, \qquad \{3;\ 1;\ 0\}, \qquad \{-2;\ 0;\ 1\}$$

Nous venons de voir que, s'il possède plusieurs solutions distinctes, alors il possède obligatoirement une infinité de solutions.

Corrigé de l'exercice 2-4 - 1

$$\begin{array}{llll} 3x & +2y & -z & =4 \\ x & -y & +z & =1 \end{array}$$

Dans le but d'écrire la solution avec des nombre entiers, permutons les lignes et les colonnes

$$\begin{array}{lllll} \boxed{z} & -y & +x & =1 & \mid \times 1 \\ -z & +2y & +3x & =4 & \mid \times 1 \end{array}$$

On obtient

$$\begin{array}{llll} \boxed{z} & -y & +x & =1 \\ & \boxed{y} & +4x & =5 \end{array}$$

On peut choisir librement x puis calculer y et z

$$x=t$$
$$y=5-4x=5-4t$$
$$z=1-x+y=1-t+5-4t=6-5t$$

Sous la forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Une base du noyau est

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Un repère du sous-espace affine des solutions est

$$\left(A,\ \vec{g}\right) \qquad \text{où} \qquad A\ (0;\ 5;\ 6)$$

L'ensemble des solutions est donc une droite, c'est-à-dire un sous-espace affine de dimension 1 dans un espace de dimension 3.

Corrigé de l'exercice 2-4 - 2

$$3x + 2y - z = 4$$

On peut choisir librement x et y puis calculer z

$$x = s, \qquad y = t,$$
$$z = 3x + 2y - 4 = 3s + 2t - 4$$

Sous la forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Une base du noyau est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Un repère du sous-espace affine des solutions est

$$\left(A, \vec{g}_1, \vec{g}_2\right) \qquad \text{où}$$

$$A\,(0;\ 0;\ -4), \qquad \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions est un plan, c'est-à-dire un sous-espace affine de dimension 2 dans un espace de dimension 3.

Corrigé de l'exercice 2-4 - 3

$$\vec{g}_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\left(A, \vec{g}_1, \vec{g}_2\right) \qquad \text{est un repère du plan G}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + s\,\vec{g}_1 + t\,\vec{g}_2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Eliminons les paramètres

$$\begin{array}{rrll} \boxed{2s} & -4t & = x - 3 & \mid \times (-1) \quad \mid \times 3 \\ s & +5t & = y + 2 & \mid \times 2 \\ -3s & +6t & = z - 1 & \qquad\qquad \mid \times 2 \end{array}$$

On obtient

$$\begin{array}{rrl} \boxed{2s} & -4t & = x - 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \boxed{14\,t} &= -x + 2y + 7 \\ 0 &= 3x + 2z - 11 \end{aligned}$$

Le système cartésien est

$$3x + 2z - 11 = 0$$

Corrigé de l'exercice 2-4 - 4

$$\begin{array}{llllll} \boxed{x_1} - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 & \mid \times(-1) & \mid \times(-2) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 & \mid \times 1 & \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 & & \mid \times 1 \end{array}$$

Eliminons dans la première colonne

$$\begin{array}{ll} \boxed{x_1} - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 & \\ \boxed{3x_2} - 3x_3 + 2x_4 = -2 & \mid \times 1 \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 & \mid \times(-1) \end{array}$$

Eliminons dans la deuxième colonne

$$\begin{array}{l} \boxed{x_1} - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \boxed{3x_2} - 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ \boxed{2x_3} - 2x_4 = -1 \end{array}$$

On peut choisir librement x_4 puis calculer x_3, x_2, x_1

$$x_4 = t$$

$$x_3 = \frac{-1 + 2x_4}{2} = -\frac{1}{2} + t$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2x_4 + 3x_3}{3} = \frac{-2 - 2t - \frac{3}{2} + 3t}{3} = -\frac{7}{6} + \frac{t}{3}$$

$$x_1 = 3 + x_4 - 2x_3 + x_2 = 3 + t + 1 - 2t - \frac{7}{6} + \frac{t}{3} = \frac{17}{6} - \frac{2t}{3}$$

En écrivant sous la forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Une solution particulière est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une base du noyau est

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Un repère du sous-espace des solutions est

$$\left(A,\ \vec{g}\right) \qquad \text{où} \qquad A\left(\frac{17}{6};\ -\frac{7}{6};\ -\frac{1}{2};\ 0\right)$$

L'ensemble des solutions est une droite, c'est-à-dire un sous-espace affine de dimension 1 d'un espace de dimension 4.

Corrigé de l'exercice 2-4 - 5

$$\begin{array}{llllll} \boxed{x_1} & -3x_2 & +x_3 & -x_4 & =2 & \times(-2) \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & =1 & \times 1 \end{array}$$

Eliminons dans la première colonne

$$\begin{array}{lllll} \boxed{x_1} & -3x_2 & +x_3 & -x_4 & =2 \\ & \boxed{7x_2} & -3x_3 & +4x_4 & =-3 \end{array}$$

On peut choisir librement x_3 , x_4 puis calculer x_2, x_1

$$x_3 = s, \qquad x_4 = t$$

$$x_2 = \frac{-3+3x_3-4x_4}{7} = \frac{-3+3s-4t}{7}$$

$$x_1 = 2 - x_3 + x_4 + 3x_2 = \frac{14-7s+7t-9+9s-12t}{7} = \frac{5+2s-5t}{7}$$

En écrivant sous la forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Une solution particulière est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une base du noyau est

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$$

Un repère du sous-espace des solutions est

$$\left(A,\ \vec{g}_1,\ \vec{g}_2\right) \qquad \text{où}$$

$$A\left(\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7};\ 0;\ 0\right), \qquad \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est un plan, c'est-à-dire un sous-espace affine de dimension 2 dans un espace de dimension 4.

Corrigé de l'exercice 2-4 - 6

Une solution particulière du système est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Une base du noyau est

$$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Un repère du sous-espace affine solution est

$$\left(A, \vec{g}_1, \vec{g}_2\right) \qquad \text{où}$$

$$A\,(-5;\ 2;\ -4;\ 3), \qquad \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la forme cartésienne, récrivons le système dans le but d'éliminer les paramètres s et t.

$$\begin{array}{rrcl|l|l} \boxed{4\,s} & +3\,t & = & x_1+5 & \times 1 & \times 1 \\ -s & +2\,t & = & x_2-2 & \times 4 & \\ s & -7\,t & = & x_3+4 & & \times(-4) \\ & t & = & x_4-3 & & \end{array}$$

Eliminons dans la première colonne

$$\begin{array}{rrcl|l|l} \boxed{4\,s} & +3\,t & = & x_1+5 & & \\ & \boxed{11\,t} & = & x_1+4\,x_2-3 & \times 31 & \times 1 \\ & 31\,t & = & x_1-4\,x_3-11 & \times(-11) & \\ & t & = & x_4-3 & & \times(-11) \end{array}$$

Eliminons dans la deuxième colonne

$$\begin{array}{rrcl|l} \boxed{4\,s} & +3\,t & = & x_1+5 & \\ & \boxed{11\,t} & = & x_1+4\,x_2-3 & \\ & 0 & = & 20\,x_1+124\,x_2+44\,x_3+28 & \times \frac{1}{4} \\ & 0 & = & x_1+4\,x_2-11\,x_4+30 & \end{array}$$

On obtient un système cartésien

$$\begin{aligned} 5\,x_1+31\,x_2+11\,x_3+7 &= 0 \\ x_1+4\,x_2-11\,x_4+30 &= 0 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2-5 - P 14 a)

```
m = {{2, 1}, {8, 1}, {12, 1}}
```

```
{{2, 1}, {8, 1}, {12, 1}}
```

```
MatrixForm[m]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b = {1, 3.5, 5}
```
```
{1, 3.5, 5}
```

```
LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

... LinearSolve: Linear equation encountered that has no solution.

```
LinearSolve[{{2, 1}, {8, 1}, {12, 1}}, {1, 3.5, 5}]
```

L'ensemble des solutions est vide.

Corrigé de l'exercice 2-5 - P 14 b) avec *Mathematica*

```
b = {1, 3.4, 5}
```
```
{1, 3.4, 5}
```

```
LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

```
{0.4, 0.2}
```

```
NullSpace[m]
```
espace nul

```
{}
```

Le problème admet une et une seule solution

$$m = 0.4, \qquad p = 0.5$$

Corrigé de l'exercice 2-5 P 15

```
m = {{4, 2, 1}, {36, 6, 1}}
```
```
{{4, 2, 1}, {36, 6, 1}}
```

```
b = {1, -1}
```
```
{1, -1}
```

```
x0 = LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

$$\left\{-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0\right\}$$

```
g = NullSpace[m]
```
espace nul

```
{{1, -8, 12}}
```

```
{a, b, c} = x0 + t g[[1]]
```

$$\left\{-\frac{1}{6} + t, \frac{5}{6} - 8\,t, 12\,t\right\}$$

En comparons avec la solution de l'exercice 2-2 P 15

```
Clear[m];
```
efface

$$\text{Simplify}\left[\left\{m, -\frac{1}{2} - 8\,m, 2 + 12\,m\right\} /.\ m \to -\frac{1}{6} + t\right]$$
simplifie

$$\left\{-\frac{1}{6} + t, \frac{5}{6} - 8\,t, 12\,t\right\}$$

Corrigé de l'exercice 2-5 P 16

```
m = {{1, 0, -3, 0}, {0, 3, 0, -2}, {0, 1, -2, 0}, {0, 4, -8, 0}}
{{1, 0, -3, 0}, {0, 3, 0, -2}, {0, 1, -2, 0}, {0, 4, -8, 0}}
```

```
MatrixForm[m]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

```
b = {0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0}
```

```
LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

```
{0, 0, 0, 0}
```

```
g = NullSpace[m]
```
espace nul

```
{{3, 2, 1, 3}}
```

$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = t\, g[[1]]$

$\{3\,t, 2\,t, t, 3\,t\}$

Puisque $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ doivent être entiers positifs et minimaux, on doit avoir t = 1

$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}\ /.\ t \to 1$

```
{3, 2, 1, 3}
```

Corrigé de l'exercice 2-5 P 18

```
m = {{-90, 90, 0}, {-99, 0, 99}}
{{-90, 90, 0}, {-99, 0, 99}}
```

```
b = {270, -99}
{270, -99}
```

```
a = LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

```
{1, 4, 0}
```

```
g = NullSpace[m]
    espace nul
{{1, 1, 1}}

{c, d, u} = a + s g[[1]]
{1 + s, 4 + s, s}
```

$$0 \le 1 + s \le 9$$
$$0 \le 4 + s \le 9$$
$$0 \le s \le 9$$

Les valeurs possibles pour s sont {0, 1, 2, 3, 4, 5} ce qui produit 6 solutions

```
{c, d, u} /. {{s → 0}, {s → 1}, {s → 2}, {s → 3}, {s → 4}, {s → 5}}
{{1, 4, 0}, {2, 5, 1}, {3, 6, 2}, {4, 7, 3}, {5, 8, 4}, {6, 9, 5}}
```

Corrigé de l'exercice 2-5 P 19 avec *Mathematica*

```
m = {{1, 1, 1}, {0.75, 0.84, 0.92}}
{{1, 1, 1}, {0.75, 0.84, 0.92}}

b = {4500, 4005}
{4500, 4005}

a = LinearSolve[m, b]
    résous équation linéaire
{62.212, 1555.3, 2882.49}

g = NullSpace[m]
    espace nul
{{0.384012, -0.816026, 0.432014}}

{m1, m2, m3} = a + s g[[1]]
{62.212 + 0.384012 s, 1555.3 - 0.816026 s, 2882.49 + 0.432014 s}
```

En exigeant de plus que $m_1 \geq 0$ et $m_2 \geq 0$, les valeurs possibles de s sont situées dans l'intervalle

```
Reduce[{m1 ≥ 0, m2 ≥ 0, m3 ≥ 0}, s, Reals]
réduis                            nombres ı
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
-162.005 ≤ s ≤ 1905.94
```

Comparons avec la solution de l'exercice 2-2 P 19

```
subst = Solve[2882.4884792626717` + 0.43201382466358695` s == t, s]
        résous
{{s → 2.31474 (-2882.49 + 1. t)}}

Simplify[{m1, m2, m3} /. subst]
simplifie
```

$\{\{-2500. + 0.888889\,t,\ 7000. - 1.88889\,t,\ 9.09495 \times 10^{-13} + 1.\,t\}\}$

Corrigé de l'exercice 2-5 P 20

L'équation n'étant pas linéaire, il n'est pas possible d'utiliser LinearSolve ou NullSpace.

```
Clear[v2, d];
```
efface

```
Solve[v2 (d/2 + 15) == 100 (d/2 - 15), v2]
```
résous

$$\left\{\left\{v2 \to \frac{100\,(-30 + d)}{30 + d}\right\}\right\}$$

Corrigé de l'exercice 2-5 P 21

```
m = {{1, 1, 1}, {1, 1, 0}, {1, 1, -2}}
```

```
{{1, 1, 1}, {1, 1, 0}, {1, 1, -2}}
```

```
b = {100, 70, 0}
```

```
{100, 70, 0}
```

```
LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

LinearSolve: Linear equation encountered that has no solution.

```
LinearSolve[{{1, 1, 1}, {1, 1, 0}, {1, 1, -2}}, {100, 70, 0}]
```

L'ensemble des solutions est vide.

Corrigé de l'exercice 2-5 R 1

a) Condition

$$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$$

b)

$$\begin{array}{llll} c & -2b & +2a & = 0 \\ c & +5b & +5a & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} c & -2b & +2a & = 0 \\ \text{""} & 7b & +3a & = 0 \end{array}$$

On peut choisir $a = t$ puis calculer b et c

$$\begin{aligned} a &= t \\ b &= -\tfrac{3}{7}\,t \\ c &= -\tfrac{20}{7}\,t \end{aligned}$$

Une solution particulière est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une base du noyau est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{20}{7} \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{ou} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix} \right\}$$

La solution générale est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{20}{7} \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

c) On choisit une valeur de t qui vérifie la condition a). Par exemple, pour $t = 7$,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Une équation de la droite PQ est

$$7x - 3y - 20 = 0$$

Corrigé de l'exercice 2-5 R 2

a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A\ (0,\ -3,\ 4), \qquad \overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le système paramétrique décrit le plan défini par le repère affine $(A,\ \overrightarrow{g_1},\ \overrightarrow{g_2})$ où A est un point d'attache du plan et $(\overrightarrow{g_1},\ \overrightarrow{g_2})$ est un système de vecteurs directeurs du plan.

b) Pour obtenir l'équation cartésienne, il suffit d'éliminer les paramètres r et s.

```
Clear[x, y, z, s, t];
efface
Eliminate[{x == r + 5 s, y == -3 + 2 r + s, z == 4 + 3 r - 2 s}, {r, s}]
élimine
```

87 + 17 y − 9 z == 7 x

Corrigé de l'exercice 2-5 R 3

Système linéaire

```
m = {{1, 1, 1, 1}, {1, 0, -1, -1}, {-1, 3, -1, 0}}
```

{{1, 1, 1, 1}, {1, 0, −1, −1}, {−1, 3, −1, 0}}

```
b = {128, 0, 0}
```

{128, 0, 0}

```
x0 = LinearSolve[m, b]
     résous équation linéaire
```

{48, 32, 48, 0}

```
ker = NullSpace[m]
      espace nul
```

{{1, −2, −7, 8}}

```
x = x0 + t ker[[1]]
```

{48 + t, 32 − 2 t, 48 − 7 t, 8 t}

Conditions : les nombres cherchés doivent être des entiers non négatifs

$$t \in \mathbb{Z}$$
$$48 + t \geq 0 \iff t \geq -48$$
$$32 - 2t \geq 0 \iff t \leq 16$$
$$48 - 7t \geq 0 \iff t \leq 6$$
$$8t \geq 0 \iff t \geq 0$$

```
p = Table[{t → k}, {k, 0, 6}]
    table
```

{{t → 0}, {t → 1}, {t → 2}, {t → 3}, {t → 4}, {t → 5}, {t → 6}}

Ensemble des solutions (il y a 7 solutions)

```
x /. p
```

{{48, 32, 48, 0}, {49, 30, 41, 8}, {50, 28, 34, 16},
{51, 26, 27, 24}, {52, 24, 20, 32}, {53, 22, 13, 40}, {54, 20, 6, 48}}