

Thème : Simulation § 1 et § 2

Lien vers les énoncés des exercices:

<https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/simulation/Simulation.pdf>

Corrigé de l'exercice 1 - 1

A chaque appel de RandomReal, une nouvelle valeur est calculée.

C'est ainsi que la valeur de RandomReal qui figure dans la liste "echant" risque fort d'être différente de la valeur de RandomReal qui figure dans le test "critQ".

Le test "critQ" doit donc reprendre la valeur tirée de "echant":

```
echant = RandomReal[{0, 1}, 20];
           |nombre réel aléatoire
critQ[x_] := 0.4 <= x < 0.6
Select[echant, critQ]
           |sélectionne
{0.418998, 0.461055, 0.562009}
```

Corrigé de l'exercice 1 - 2

```
figure = {"as", "roi", "dame", "valet", "10", "9", "8", "7", "6"};
ligue = {"coeur", "carreau", "trèfle", "pique"};
jeu = Table[{figure[[i]], ligue[[j]]}, {j, 1, 4}, {i, 1, 9}];
           |table
jeu = Flatten[jeu, 1];
           |Laplatis
perm = RandomSample[Range[36]]
           |échantillon aléat· |plage
{36, 31, 11, 8, 35, 7, 1, 4, 14, 28, 25, 10, 30, 19, 12, 34, 2,
 33, 13, 18, 21, 27, 23, 22, 5, 20, 16, 9, 26, 24, 6, 32, 15, 17, 3, 29}
```

Jeu de carte brassé:

```
jeuBrasse = jeu[[perm]]
{{6, pique}, {valet, pique}, {roi, carreau}, {7, coeur}, {7, pique},
 {8, coeur}, {as, coeur}, {valet, coeur}, {10, carreau}, {as, pique},
 {8, trèfle}, {as, carreau}, {dame, pique}, {as, trèfle}, {dame, carreau},
 {8, pique}, {roi, coeur}, {9, pique}, {valet, carreau}, {6, carreau},
 {dame, trèfle}, {6, trèfle}, {10, trèfle}, {valet, trèfle}, {10, coeur},
 {roi, trèfle}, {8, carreau}, {6, coeur}, {7, trèfle}, {9, trèfle}, {9, coeur},
 {10, pique}, {9, carreau}, {7, carreau}, {dame, coeur}, {roi, pique}}

joueur1 = jeuBrasse[[{1, 2, 3, 13, 14, 15, 25, 26, 27}]]
{{6, pique}, {valet, pique}, {roi, carreau}, {dame, pique},
 {as, trèfle}, {dame, carreau}, {10, coeur}, {roi, trèfle}, {8, carreau}}

joueur2 = jeuBrasse[[{4, 5, 6, 16, 17, 18, 28, 29, 30}]]
{{7, coeur}, {7, pique}, {8, coeur}, {8, pique},
 {roi, coeur}, {9, pique}, {6, coeur}, {7, trèfle}, {9, trèfle}}
```

```

joueur3 = jeuBrasse[{{7, 8, 9, 19, 20, 21, 31, 32, 33}}]
{{as, coeur}, {valet, coeur}, {10, carreau}, {valet, carreau},
 {6, carreau}, {dame, trèfle}, {9, coeur}, {10, pique}, {9, carreau}}

joueur4 = jeuBrasse[{{10, 11, 12, 22, 23, 24, 34, 35, 36}}]
{{as, pique}, {8, trèfle}, {as, carreau}, {6, trèfle},
 {10, trèfle}, {valet, trèfle}, {7, carreau}, {dame, coeur}, {roi, pique}}

Clear[figure, ligue, jeu, jeuBrasse, perm, joueur1, joueur2, joueur3, joueur4]
|efface

```

Corrigé de l'exercice 2 - 1

Exercice 2-1 a)

Considérons les coordonnées (x, y) du centre de la balle à l'intérieur d'une maille, $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq 3$.

La balle passe si et seulement si $0.6 < x < 3.4$ et $0.6 < y < 2.4$.

L'aire d'une maille est $4 \times 3 = 12$.

L'aire de la surface où la balle peut passer est

$$(3.4 - 0.6) (2.4 - 0.6)$$

5.04

et la probabilité cherchée est égale au rapport de ces deux aires:

$$\mu = \frac{(3.4 - 0.6) (2.4 - 0.6)}{4 \times 3}$$

0.42

Exercice 2-1 b)

Notons x la distance du centre de la balle à la verticale du grillage la plus proche et y la distance du centre de la balle à l'horizontale du grillage la plus proche.

x est uniformément distribué dans $[0; 2[$ et y est uniformément distribué dans $[0; 1.5[$.

La variable aléatoire vaudra 1 si la balle passe et 0 sinon:

```

va[] := Module[{x, y},
  x = RandomReal[{0, 2}]; y = RandomReal[{0, 1.5}];
  If[x > 0.6 && y > 0.6, 1, 0]]

```

Nous utiliserons une version plus efficace :

```
Clear[va, n, echant, m, s, sm];
```

```
|efface
```

```
va[] := Module[{}, If[RandomReal[{0, 2}] > 0.6 && RandomReal[{0, 1.5}] > 0.6, 1, 0]]
|module |si |nombre réel aléatoire |nombre réel aléatoire
```

```

n = 10000;
echant = Table[va[], {n}];
      |table
m =  $\frac{\text{Apply[Plus, echant]}}{n}$ ;
s =  $\sqrt{m(1-m)}$ ;
sm =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ;
N[{m, s, sm}]
|valeur numérique
{0.421, 0.49372, 0.0049372}

```

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

```

N[{m - 2 sm, m + 2 sm}]
|valeur numérique
{0.411126, 0.430874}

```

Corrigé de l'exercice 2 - 2

Première méthode

Choisissons de calculer le volume de la partie de la boule qui se trouve dans le cube $[0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$. Il s'agit de $1/8$ du volume de la boule.

La moyenne empirique m représente directement le volume de $1/8$ de boule.

Le volume de la boule sera $8 * m$.

```

va[] := Module[{x, y, z},
  x = RandomReal[{0, 1}]; y = RandomReal[{0, 1}]; z = RandomReal[{0, 1}];
  If[x2 + y2 + z2 ≤ 1, 1, 0]]

```

Nous utiliserons une version plus efficace :

```

Clear[va, n, echant, m, s, sm];
|efface
va[] := Module[{}, If[RandomReal[{0, 1}]2 + RandomReal[{0, 1}]2 + RandomReal[{0, 1}]2 ≤ 1, 1,
|module |si
0]

n = 10000;
echant = Table[va[], {n}];
      |table
m =  $\frac{\text{Apply[Plus, echant]}}{n}$ ;
s =  $\sqrt{m(1-m)}$ ;
sm =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ;
N[8 {m, s, sm}]
|valeur numérique
{4.1416, 3.99749, 0.0399749}

```

Comparons avec la valeur exacte:

$N\left[\frac{4\pi}{3}\right]$
 [valeur numérique]

4.18879

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

$N[8 \{m - 2 sm, m + 2 sm\}]$
 [valeur numérique]

{4.06165, 4.22155}

Deuxième méthode

Enfermons la boule dans le cube $[-1; 1] \times [-1; 1] \times [-1; 1]$. Le volume de ce cube est égal à

`Clear[va, echant, n, m, s, sm, boite];`

[efface]

`boite = 8;`

Dans ce cube, tirons des points (x, y, z) au hasard et testons s'ils appartiennent à la boule:

```
va[] := Module[{x, y, z},
  x = RandomReal[{-1, 1}]; y = RandomReal[{-1, 1}]; z = RandomReal[{-1, 1}];
  If[x2 + y2 + z2 ≤ 1, 1, 0]]
```

Nous utiliserons une version plus efficace :

```
va[] := Module[{}, If[RandomReal[{-1, 1}]2 + RandomReal[{-1, 1}]2 + RandomReal[{-1, 1}]2 ≤ 1
```

Le volume de la boule sera estimé par $\text{boite} \cdot m$:

`n = 10000;`

`echant = Table[va[], {n}];`
 [table]

`m = $\frac{\text{Apply}[Plus, echant]}{n}$;`

`s = $\sqrt{m(1-m)}$;`

`sm = $\frac{s}{\sqrt{n}}$;`

$N[\text{boite} * \{m, s, sm\}]$

[valeur numérique]

{4.1808, 3.99591, 0.0399591}

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

$N[\text{boite} * \{m - 2 sm, m + 2 sm\}]$

[valeur numérique]

{4.10088, 4.26072}

Corrigé de l'exercice 2 - 3

Utilisons `RandomSample[Range[k]]` pour générer une permutation aléatoire:

```

Clear[va, n, k, v0, echant, m, s, sm,  $\mu$ ];
|efface
k = 100;
v0 = Range[k];
|plage

va[] := Module[{v},
|module
    v = RandomSample[Range[k]];
    |Échantillon aléato... |plage
    If[MemberQ[v - v0, 0], 0, 1]
    |si |est membre?

n = 10000;
echant = Table[va[], {n}];
|table
m = Apply[Plus, echant];
|n
s =  $\sqrt{m(1-m)}$ ;
sm =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ;
N[{m, s, sm}]
|valeur numérique
{0.3656, 0.481598, 0.00481598}

```

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

```

N[{m - 2 sm, m + 2 sm}]
|valeur numérique
{0.355968, 0.375232}

```

L'espérance mathématique et l'erreur valent:

```

 $\mu = \frac{1}{E}$ ; N[{ $\mu$ , Abs[m -  $\mu$ ]}]
|valeur... |valeur absolue
{0.367879, 0.00227944}

```

Corrigé de l'exercice 2 - 4, première version

```

va[] := Module[{n}, n = 1; While[RandomInteger[{1, 6}]  $\neq$  6, n = n + 1]; n]
|module |tant... |entier aléatoire

```

```

n = 10 000;
echant = Table[va[], {n}];
m =  $\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, \text{echant}]}{n}$ ;
s =  $\sqrt{\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, (\text{echant} - m)^2]}{n}}$ ;
sm =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ;
N[{m, s, sm}]

```

[valeur numérique]
{6.0131, 5.57521, 0.0557521}

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

```

N[{m - 2 sm, m + 2 sm}]

```

[valeur numérique]
{5.9016, 6.1246}

L'espérance mathématique vaut (sans explication) :

$$\begin{aligned} \mu &= 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{5}{6} \frac{1}{6} + 3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + 4 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \dots \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + 2 \frac{5}{6} + 3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

6

Corrigé de l'exercice 2 - 4, deuxième version (plus efficace)

```

n = 100 000;
echant = 1 + RandomInteger[GeometricDistribution[ $\frac{1}{6}$ ], n];
m =  $\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, \text{echant}]}{n}$ ;
s =  $\sqrt{\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, (\text{echant} - m)^2]}{n}}$ ;
sm =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ;
N[{m, s, sm}]

```

[valeur numérique]
{5.99776, 5.51195, 0.0174303}

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

```

N[{m - 2 sm, m + 2 sm}]

```

[valeur numérique]
{5.9629, 6.03262}

L'espérance mathématique vaut (sans explication) :

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{5}{6} \frac{1}{6} + 3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + 4 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \dots \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + 2 \frac{5}{6} + 3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right)\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

6

Corrigé de l'exercice 2 - 5

```
reussite[] := RandomInteger[{1, 6}] + RandomInteger[{1, 6}] + RandomInteger[{1, 6}] > 15
```

```
va[] := Module[{n}, n = 1;
  While[Not[reussite[]], n = n + 1]; n]
```

```
n = 10 000;
```

```
echant = Table[va[], {n}];
```

```
m =  $\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, \text{echant}]}{n}$ ;
```

```
s =  $\sqrt{\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, (\text{echant} - m)^2]}{n}}$ ;
```

```
sm =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ;
```

```
N[{m, s, sm}]
```

```
[valeur numérique]
```

```
{21.7409, 21.7289, 0.217289}
```

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

```
N[{m - 2 sm, m + 2 sm}]
```

```
[valeur numérique]
```

```
{21.3063, 22.1755}
```

Corrigé de l'exercice 2 - 6

```
Clear[successeur];
```

```
[efface]
```

```
successeur[x_] := RandomInteger[{1, 6}]
```

```
[entier aléatoire]
```

```
Clear[arret, va];
```

```
[efface]
```

```
va[] := Plus @@ FixedPointList[successeur, RandomInteger[{1, 6}]]
```

```
[plus]
```

```
[liste de point fixe]
```

```
[entier aléatoire]
```

```

n = 10 000;
echant = Table[va[], {n}];
m =  $\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, \text{echant}]}{n}$ ;
s =  $\sqrt{\frac{\text{Apply}[\text{Plus}, (\text{echant} - m)^2]}{n}}$ ;
sm =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ;
N[{m, s, sm}]

```

{24.4343, 19.7878, 0.197878}

Interprétation : avec une probabilité de 95 %, le nombre cherché μ est situé dans l'intervalle

```

N[{m - 2 sm, m + 2 sm}]

```

{24.0385, 24.8301}

```

Needs["Statistique`",

```

["https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Statistique.m"](https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Statistique.m)]

```

k = Max[echant]

```

175

```

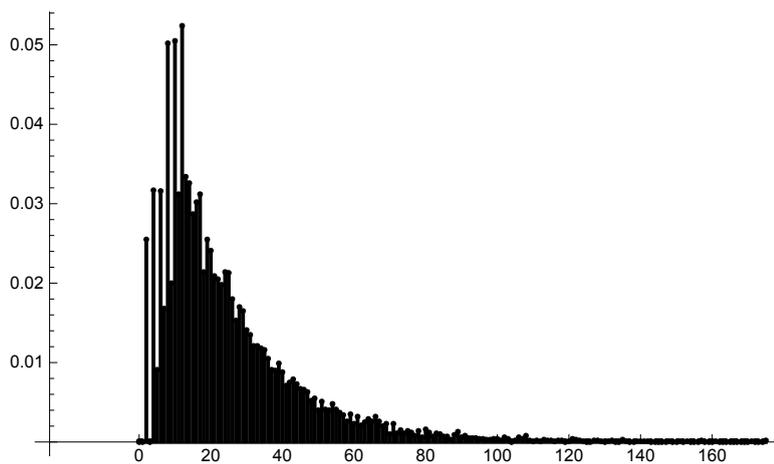
freq = Table[Count[echant, i] / n, {i, 0, k}];

```

```

diagrammeBaton[Range[0, k], freq, Ticks -> {Range[0, 220, 20], Automatic}]

```



```
histogramme[Range[- $\frac{1}{2}$ , k +  $\frac{1}{2}$ ], freq, Ticks -> {Range[0, 220, 20], Automatic}]
```

