Marcel Délèze
Edition 2017

Thème: Interpolation, §3 Approximation
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/interpolation/3-Approximation.pdf

Corrigé de l'exercice 3.1-1

```
f[t_] := 1/t
```

```
x = {1, 2, 4};
```

```
y = Map[f, x]
```
applique

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$

```
donnees = Transpose[{x, y}]
```
transposée

$\{\{1, 1\}, \{2, \frac{1}{2}\}, \{4, \frac{1}{4}\}\}$

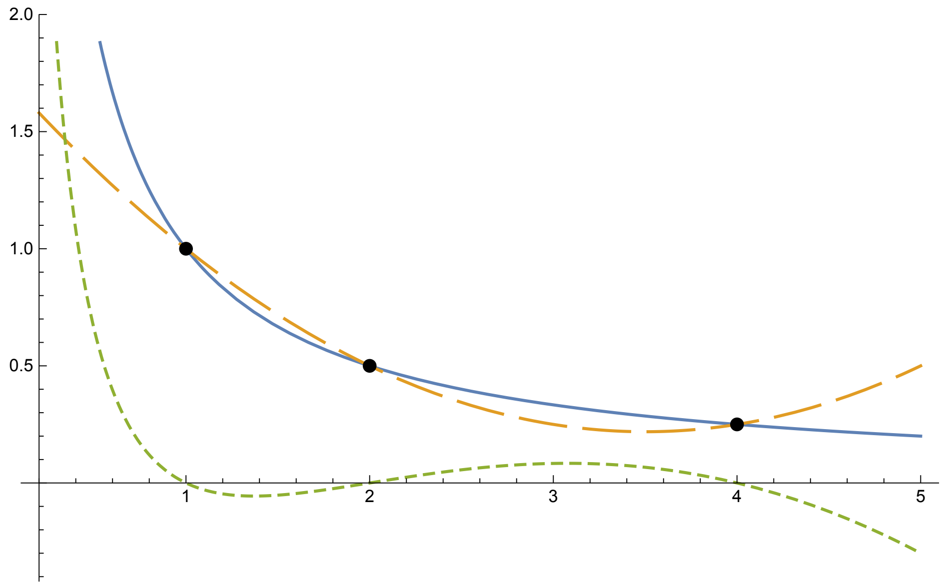
```
g[t_] = InterpolatingPolynomial[donnees, t]
```
polynôme d'interpolation

$1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}(-2 + t)\right)(-1 + t)$

```
e[t_] = f[t] - g[t]
```

$-1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}(-2 + t)\right)(-1 + t) + \frac{1}{t}$

```
Plot[{f[t], g[t], e[t]}, {t, 0.2`, 5},
tracé de courbes
 PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.05`, 0.02`}], Dashing[{0.01`}]},
 style de tracé  style de rayures  style de rayures  style de rayures
 Epilog → {PointSize[0.015`], Point /@ donnees}, ImageSize → {500, 300}]
 épilogue  taille des points  point  taille d'image
```



Corrigé de l'exercice 3.1-2

```
Clear[x, y, f];
efface
X = {x[0], x[0] + h, x[0] + 2 h, x[0] + 3 h};
pts = Transpose[{X, Map[f, X]}]
      transposée  applique
```

```
{{x[0], f[x[0]]}, {h + x[0], f[h + x[0]]},
 {2 h + x[0], f[2 h + x[0]]}, {3 h + x[0], f[3 h + x[0]]}}
```

```
g[t_] = InterpolatingPolynomial[pts, t];
        polynôme d'interpolation
```

$$\text{Simplify}\left[g\left[x[0] + \frac{3}{2} h\right]\right]$$

simplifie

$$\frac{1}{16}\left(-f[x[0]] + 9 f[h + x[0]] + 9 f[2 h + x[0]] - f[3 h + x[0]]\right)$$

$$\boxed{g\left(x_0 + \frac{3}{2} h\right) = \frac{-f(x_0) + 9 f(x_0 + h) + 9 f(x_0 + 2 h) - f(x_0 + 3 h)}{16}}$$

```
Clear[f, g, e, t];
efface
```

$$g[4.5] = \frac{-1.44225 + 9 * 1.5874 + 9 * 1.70998 - 1.81712}{16}$$

```
1.65107
```

```
f[t_] := ∛t;
f[4.5]
```

1.65096

```
e[t_] := g[t] - f[t]
e[4.5]
```

0.000102001

Corrigé de l'exercice 3.1-3

```
Clear[f, g, e, t];
```
efface

```
f[t_] := Sin[t]
```
sinus

Pour obtenir un polynôme de degré ≤ 6, il faut prendre 7 points, c'est-à-dire diviser l'intervalle en 6 intervalles partiels

```
x = Range[0, π, π/6];
```
plage

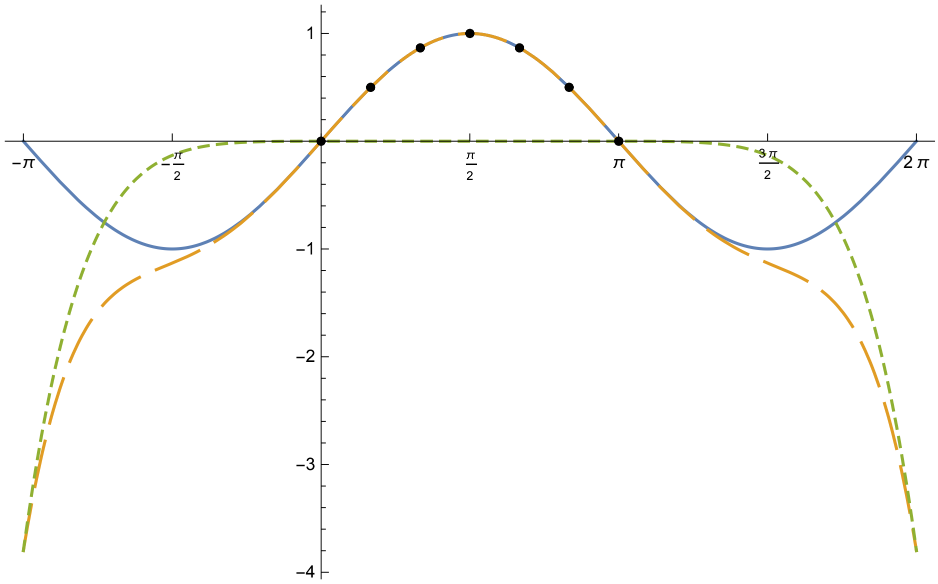
```
y = Map[f, x]; pts = Transpose[{x, y}]
```
applique, transposée

$$\left\{\{0, 0\}, \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{\frac{\pi}{2}, 1\right\}, \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right\}, \{\pi, 0\}\right\}$$

```
g[t_] = InterpolatingPolynomial[pts, t];
```
polynôme d'interpolation

```
e[t_] := g[t] - f[t]
```

```
Plot[{f[t], g[t], e[t]}, {t, -π, 2 π},
tracé de courbes
 PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.05`, 0.02`}], Dashing[{0.01`}]},
 style de tracé  style de rayures  style de rayures  style de rayures
 Epilog → {PointSize[0.01`], Point /@ pts},
 épilogue  taille des points  point
 ImageSize → {500, 300}, Ticks → {Range[-π, 2 π, π/2], Automatic}]
 taille d'image  graduati⋯  plage  automatique
```



Sur l'intervalle [0, π], l'approximation de *f* par *g* est bonne;
à l'extérieur de cet intervalle, l'erreur peut devenir énorme.

Corrigé de l'exercice 3.1-4

$$p(f)(t) = f(x_0)\,L_0(t) + f(x_1)\,L_1(t) + \ldots + f(x_{n-1})\,L_{n-1}(t)$$

1) (voir exercice 2.1 - 2)

$$p(f)(x_0) = f(x_0)\,L_0(x_0) + f(x_1)\,L_1(x_0) + f(x_2)\,L_1(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})\,L_{n-1}(x_0) =$$
$$f(x_0)\cdot 1 + f(x_1)\cdot 0 + f(x_2)\cdot 0 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot 0 = f(x_0) = y_0$$

$$p(f)(x_1) = f(x_0)\,L_0(x_1) + f(x_1)\,L_1(x_1) + f(x_2)\,L_1(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\,L_{n-1}(x_1) =$$
$$f(x_0)\cdot 0 + f(x_1)\cdot 1 + f(x_2)\cdot 0 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot 0 = f(x_1) = y_1$$

$$\ldots$$

$$p(f)(x_{n-1}) = f(x_0)\,L_0(x_{n-1}) + f(x_1)\,L_1(x_{n-1}) + \ldots + f(x_{n-1})\,L_{n-1}(x_{n-1}) =$$
$$f(x_0)\cdot 0 + f(x_1)\cdot 0 + f(x_2)\cdot 0 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot 1 =$$
$$f(f(x_0)\cdot 0 + f(x_1)\cdot 1 + f(x_2)\cdot 0 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot 0 = f(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

2) Soit *f* un polynôme de degré $\leq (n-1)$; alors $e = p(f) - f$ est un polynôme de degré $\leq (n-1)$ qui s'annule en *n* abscisses distinctes $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

Il s'ensuit que *e* est nul (voir à la fin du § 1.1 sous *Démonstration de l'unicité du polynôme d'interpolation*).

Donc $p(f) = f$.

3)

$$p(f+g)(t) =$$

$$(f(x_0)+g(x_0))L_0(t)+(f(x_1)+g(x_1))L_1(t)+\ldots+(f(x_{n-1})+g(x_{n-1}))L_{n-1}(t) = (f(x_0)L_0(t)+f(x_1)L_1(t)+\ldots+f(x_{n-1})L_{n-1}(t)) + (g(x_0)L_0(t)+g(x_1)L_1(t)+\ldots+g(x_{n-1})L_{n-1}(t)) = p(f)(t)+p(g)(t)$$

$$p(k f)(t) = (k f(x_0))L_0(t)+(k f(x_1))L_1(t)+\ldots+(k f(x_{n-1}))L_{n-1}(t) = k(f(x_0)L_0(t)+f(x_1)L_1(t)+\ldots+f(x_{n-1})L_{n-1}(t)) = k p(f)(t)$$

Corrigé de l'exercice 3.2-1

Dans le cours, nous avons établi que

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{-f(x_0)+9f(x_1)+9f(x_2)-f(x_3)}{16} = -\frac{1}{16}f(x_0)+\frac{9}{16}f(x_1)+\frac{9}{16}f(x_2)-\frac{1}{16}f(x_3) = c_0 f(x_0)+c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+c_3 f(x_3)$$

Les coefficients sont

$$c_0 = -\frac{1}{16}; \qquad c_1 = \frac{9}{16}; \qquad c_2 = \frac{9}{16}; \qquad c_3 = -\frac{1}{16}.$$

La somme des coefficients est

$$c_0+c_1+c_2+c_3 = -\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+\frac{9}{16}-\frac{1}{16} = 1$$

Corrigé de l'exercice 3.2-2

Dans le cours, nous avons établi que

$$g(t) = f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(t-x_0) = f(x_0)+\frac{-f(x_0)}{x_1-x_0}(t-x_0)+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}(t-x_0) = \left(1+\frac{-(t-x_0)}{x_1-x_0}\right)f(x_0)+\frac{t-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) = \frac{x_1-t}{x_1-x_0}f(x_0)+\frac{t-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) = c_0(t)f(x_0)+c_1(t)f(x_1)$$

Les coefficients sont

$$c_0 = \frac{x_1-t}{x_1-x_0}; \qquad c_1 = \frac{t-x_0}{x_1-x_0}$$

La somme des coefficients est

$$c_0+c_1 += \frac{x_1-t}{x_1-x_0}+\frac{t-x_0}{x_1-x_0} = 1$$

La moyenne pondérée des abscisses est

$$c_0(t)x_0+c_1(t)x_1 = \frac{x_1-t}{x_1-x_0}x_0+\frac{t-x_0}{x_1-x_0}x_1 = \frac{x_0 x_1-x_0 t+x_1 t-x_0 x_1}{x_1-x_0} = t$$

Corrigé de l'exercice 3.3-1

Pour obtenir un interpolant de degré ≤ 10, il faut prendre 11 points, c'est-à-dire il faut diviser l'intervalle $[0;\ 10]$ en 10 intervalles partiels.

```
Clear[f, g, t]; f[t_] := 0.8 * 1.2^t;
```
efface

```
x = Range[0, 10]
```
plage

```
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

```
y = Map[f, x]
```
applique

```
{0.8, 0.96, 1.152, 1.3824, 1.65888, 1.99066, 2.38879, 2.86654, 3.43985, 4.12782, 4.95339}
```

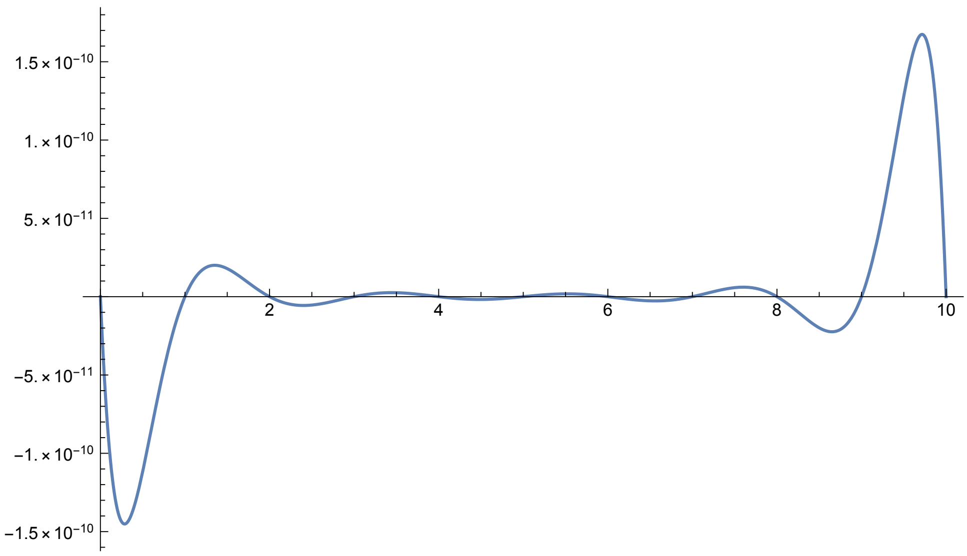
```
pts = Transpose[{x, y}]
```
transposée

```
{{0, 0.8}, {1, 0.96}, {2, 1.152}, {3, 1.3824}, {4, 1.65888}, {5, 1.99066},
 {6, 2.38879}, {7, 2.86654}, {8, 3.43985}, {9, 4.12782}, {10, 4.95339}}
```

```
g[t_] = InterpolatingPolynomial[pts, t]
```
polynôme d'interpolation

$$4.95339 + (-10+t)\,(0.415339 + (0.0354415 + (0.00184139 + (0.0000951604 + (3.05795\times10^{-6} + (1.04606\times10^{-7} + (2.64655\times10^{-9} + (6.27132\times10^{-11} + (1.21905\times10^{-12} + 2.25749\times10^{-14}\,(-3+t))\,(-7+t))\,(-4+t))\,(-9+t))\,(-1+t))\,(-8+t))\,(-2+t))\,(-5+t))\,t)$$

```
Plot[g[t] - f[t], {t, 0, 10}, PlotRange → All, ImageSize → {500, 300}]
```
tracé de courbes zone de tracé tout taille d'image



L'erreur relative maximale est environ

$$\frac{1.7\times10^{-10}}{0.8}$$

2.125×10^{-10}

ce qui est minuscule. Donc $g(t)$ est une excellente approximation de $f(t)$.

```
Plot[{f[t], g[t]}, {t, 0, 10}, PlotRange → All,
 PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.015`}]},
 Epilog → {PointSize[0.015`], Point /@ pts}, ImageSize → {500, 300}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

tracé de courbes | zone de tracé | tout | style de tracé | style de rayures | style de rayures | épilogue | taille des points | point | taille d'image | origine des axes