Marcel Délèze
Edition 2017

Thème :Interpolation § 1
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/interpolation/1-Interpolation.pdf

Corrigé de l'exercice 1.1-1 [sans ordinateur]

Nous ne prenons en compte que les deux points qui encadrent $t = 1.3$, à savoir M_1 et M_2

$$g(t) = c_0 + c_1\, t$$

$$g(1) = -1 \quad \text{et} \quad g(2) = 3$$

$$c_0 + c_1\, 1 = -1 \quad \text{et} \quad c_0 + c_1\, 2 = 3$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = -1 & | \cdot (-1) \\ c_0 + 2\, c_1 = 3 & | \cdot 1 \end{cases}$$

$$c_1 = 3 - (-1) = 4$$

$$c_0 = -1 - c_1 = -1 - 4 = -5$$

$$g(t) = -5 + 4\, t$$

$$g(1.3) = -5 + 4 \cdot 1.3 = 0.2$$

Nous ne prenons en compte que les deux points qui encadrent $t = 3.2$, à savoir M_2 et M_3

$$g(t) = c_0 + c_1\, t$$

$$g(2) = 3 \quad \text{et} \quad g(5) = -7$$

$$c_0 + c_1\, 2 = 3 \quad \text{et} \quad c_0 + c_1\, 5 = -7$$

$$\begin{cases} c_0 + 2\, c_1 = 3 & | \cdot (-1) \\ c_0 + 5\, c_1 = -7 & | \cdot 1 \end{cases}$$

$$3\, c_1 = -10 \qquad \Longrightarrow c_1 = -\frac{10}{3}$$

$$c_0 = 3 - 2\, c_1 = \frac{29}{3}$$

$$g(t) = \frac{29}{3} - \frac{10\, t}{3}$$

$$g(3.2) = \frac{29}{3} - \frac{10}{3}\, 3.2 = -1$$

Corrigé de l'exercice 1.1-2 [avec *Mathematica*]

```
pts = {{-1, 2}, {1, -1}, {2, 3}, {5, -7}};
Clear[g, t];
```
efface
```
g[t_] = InterpolatingPolynomial[pts, t];
```
polynôme d'interpolation
```
Expand[g[t]]
```
développe

$$-\frac{23}{9} - \frac{8\, t}{9} + \frac{55\, t^2}{18} - \frac{11\, t^3}{18}$$

Corrigé de l'exercice 1.1-3 [sans ordinateur]

$$b_0(t) = 1; \quad b_1(t) = t+1;$$
$$b_2(t) = (t+1)(t-1); \quad b_3(t) = (t+1)(t-1)(t-2);$$

$$g(t) = c_0 b_0(t) + c_1 b_1(t) + c_2 b_2(t) + c_3 b_3(t) =$$
$$c_0 + c_1(t+1) + c_2(t+1)(t-1) + c_3(t+1)(t-1)(t-2)$$

$$g(-1) = c_0 = 2$$
$$g(1) = c_0 + c_1 2 = -1$$
$$g(2) = c_0 + c_1 3 + c_2 3 = 3$$
$$g(5) = c_0 + c_1 6 + c_2 24 + c_3 72 = -7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 3 & 3 & \\ 1 & 6 & 24 & 72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Le système linéaire est <u>triangulaire</u>, ce qui facilite grandement la résolution

$$c_0 = 2$$
$$c_1 = \frac{-1 - c_0}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$c_2 = \frac{3 - c_0 - 3c_1}{3} = \frac{11}{6}$$
$$c_3 = \frac{-7 - c_0 - 6c_1 - 24c_2}{72} = -\frac{11}{18}$$

Réponse

$$g(t) = 2 - \frac{3}{2}(1+t) + \frac{11}{6}(-1+t)(1+t) - \frac{11}{18}(-2+t)(-1+t)(1+t)$$

Corrigé de l'exercice 1.2-1

Généralisons la méthode de l'exercice 1-3. Choisissons les fonctions de base suivantes:

$$b_0(t) = 1; \quad b_1(t) = t - x_0; \quad b_2(t) = (t-x_0)(t-x_1);$$
$$b_3(t) = (t-x_0)(t-x_1)(t-x_2);$$
$$b_{n-1}(t) = (t-x_0)(t-x_1) \cdot \ ... \ \cdot (t-x_{n-2});$$

$$g(t) = c_0 b_0(t) + c_1 b_1(t) + c_2 b_2(t) + ... + c_{n-1} b_{n-1}(t)$$

On a donc

$$g(x_0) = c_0 b_0(x_0) = c_0 = y_0$$
$$g(x_1) = c_0 b_0(x_1) + c_1 b_1(x_1) = c_0 b_0(x_1) + c_1(x_1 - x_0) = y_1$$
$$g(x_2) =$$
$$c_0 b_0(x_2) + c_1 b_1(x_2) + c_2 b_2(t) = c_0 b_0(x_1) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

Un tel système, qui est triangulaire, possède toujours une solution. En effet, de la première équation, on tire la valeur de c_0 qu'on remplace dans les équations suivantes; de la deuxième équation on tire c_1 qu'on remplace dans les équations suivantes; de la troisième équation, on tire c_2 qu'on remplace dans les équations suivantes, etc.

Puisque le système linéaire possède toujours (au moins) une solution, il s'ensuit que le problème d'interpolation possède toujours (au moins) une solution.

Corrigé de l'exercice 1.2-2

$$M_0\,(-1,\,2),\;\; M_1\,(1,\,-1),\;\; M_2\,(3,\,-3),\;\; M_3\,(5,\,0)$$

```
x = {-1, 1, 3, 5}; y = {2., -1., -3., 0.};
```

$$\texttt{b[t\_]} = \left\{1,\ \texttt{Cos}\left[\frac{2\pi}{7}\,t\right],\ \texttt{Sin}\left[\frac{2\pi}{7}\,t\right],\ \texttt{Cos}\left[\frac{4\pi}{7}\,t\right]\right\};$$

cosinus sinus cosinus

```
m = Map[b, x]; MatrixForm[m]
```

applique apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi}{14}\right] & -\mathrm{Cos}\left[\frac{3\pi}{14}\right] & -\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{14}\right] \\ 1 & \mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi}{14}\right] & \mathrm{Cos}\left[\frac{3\pi}{14}\right] & -\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{14}\right] \\ 1 & -\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{7}\right] & \mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{7}\right] & \mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi}{14}\right] \\ 1 & -\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{14}\right] & -\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{14}\right] & -\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{7}\right] \end{pmatrix}$$

```
c = LinearSolve[m, y]
```

résous équation linéaire

```
{-0.686759, 2.18014, -1.91857, 0.775369}
```

```
f[t_] = c.b[t]
```

$$-0.686759 + 2.18014\,\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi t}{7}\right] + 0.775369\,\mathrm{Cos}\left[\frac{4\pi t}{7}\right] - 1.91857\,\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi t}{7}\right]$$