Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Calcul numérique de l'exponentielle et du logarithme.
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/exp_log/Exp-log.pdf

Corrigé de l'exercice 1-2-1

p	q	f(p)	f(q)
0	1	1	10
0.5	1.	3.16	10.
0.5	0.75	3.16	5.62
0.625	0.75	4.22	5.62
0.688	0.75	4.87	5.62
0.688	0.719	4.87	5.23
0.688	0.703	4.87	5.05

Réponse obtenue après 6 itérations $10^{0.7} \approx 4.96 \pm 0.09$

Corrigé de l'exercice 1-2-2

r	s	g(r)	g(s)
1	10	0	1
1.	3.162	0.	0.5
1.778	3.162	0.25	0.5
2.371	3.162	0.375	0.5
2.738	3.162	0.4375	0.5
2.943	3.162	0.4688	0.5
2.943	3.051	0.4688	0.4844

Réponse obtenue après 6 itérations $\log_{10}(3) \approx 0.477 \pm 0.008$

Corrigé de l'exercice 1-2-3

p	q	f(p)	f(q)
3	4	8	16
3.	3.5	8.	11.3
3.	3.25	8.	9.51
3.13	3.25	8.72	9.51
3.13	3.19	8.72	9.11
3.13	3.16	8.72	8.92
3.14	3.16	8.82	8.92

Réponse obtenue après 6 itérations $2^{\pi} \approx 8.87 \pm 0.05$

Corrigé de l'exercice 1-2-4

r	s	g(r)	g(s)
1000	10000	3	4
1000.	3162.	3.	3.5
1778.	3162.	3.25	3.5
1778.	2371.	3.25	3.375
1778.	2054.	3.25	3.313
1911.	2054.	3.281	3.313
1981.	2054.	3.297	3.313

Réponse obtenue après 6 itérations $\qquad \log_{10}(2000) \approx 3.305 \pm 0.008$

Corrigé de l'exercice 2-1

Réduction nà l'intervalle de référence :

$$5^{\pi} = 5^3\, 5^{\pi-3} = 125 * 5^z \qquad \text{avec} \qquad z = \pi - 3 \simeq 0.14159$$

Encadrement initial :

$$0 < z < 1 \implies 1 < 5^z < 5$$

Itérations avec la méthode d'Ozanam :

$$0 < z < \frac{0+1}{2} = 0.5 \implies 1 < 5^z < \sqrt{1 * 5} \simeq 2.236$$

$$0 < z < \frac{0+0.5}{2} = 0.25 \implies 1 < 5^z < \sqrt{1 * 2.236} \simeq 1.495$$

$$0.125 = \frac{0+0.25}{2} < z < 0.25 \implies 1.223 \simeq \sqrt{1 * 1.495} < 5^z < 1.495$$

$$0.125 < z < \frac{0.125+0.25}{2} = 0.1875 \implies 1.223 < 5^z < \sqrt{1.223 * 1.495} \simeq 1.352$$

$$0.125 < z < \frac{0.125+0.1875}{2} = 0.15625 \implies 1.223 < 5^z < \sqrt{1.223 * 1.352} \simeq 1.286$$

Résultat avec erreur

$$5^z = \frac{1.223+1.286}{2} \pm \frac{1.286-1.223}{2} \simeq 1.255 \pm 0.032$$

$$5^{\pi} = 125\,(1.255 \pm 0.032) \simeq \mathbf{156.8 \pm 4.0}$$

Corrigé de l'exercice 2-2-1

Réduction à l'intervalle de référence :

$$\log_2(10) = 1 + \log_2(5) = 2 + \log_2(2.5) = 3 + \log_2(1.25) = 3 + \log_2(z)$$

$$\text{avec} \qquad z = 1.25$$

Encadrement initial :

$$1 < z < 2 \implies 0 < \log_2(z) < 1$$

Itérations avec la méthode d'Ozanam :

$$1 < z < \sqrt{1 * 2} \simeq 1.414 \implies 0 < \log_2(z) < \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$$1.189 \simeq \sqrt{1 * 1.414} < z < 1.414 \implies 0.25 = \frac{0+0.5}{2} < \log_2(z) < 0.5$$

$$1.189 < z < \sqrt{1.189 * 1.414} \simeq 1.297 \implies 0.25 < \log_2(z) < \frac{0.25+0.5}{2} = 0.375$$

$$1.242 \simeq \sqrt{1.189 * 1.297} < z < 1.297 \implies 0.3125 = \frac{0.25+0.375}{2} < \log_2(z) < 0.375$$

$$1.242 < z < \sqrt{1.242 * 1.297} \simeq 1.269$$

$$\implies 0.3125 < \log_2(z) < \frac{0.3125+0.375}{2} = 0.34375$$

Résultat avec erreur

$$\log_2(z) = \frac{0.3125 + 0.34375}{2} \pm \frac{0.34375 - 0.3125}{2} \simeq 0.3281 \pm 0.157$$
$$\log_2(10) = 3 + (0.3281 \pm 0.157) \simeq \mathbf{3.328 \pm 0.016}$$

Corrigé de l'exercice 2-2-2

Les propriétés des fonctions exponentielles nous permettent de nous ramener à l'intervalle de référence [1, a[.

$$g\left(\frac{x}{a}\right) = \log_a\left(\frac{x}{a}\right) = \log_a(x) - \log_a(a) = g(x) - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad g(x) = 1 + g\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$g(a\,x) = \log_a(a\,x) = \log_a(a) + \log_a(x) = 1 + g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad g(x) = -1 + g(a\,x)$$

```
Clear[logarithme];
```
efface

```
logarithme[a_, x_] := 1 + logarithme[a, x/a] /; x ≥ a;
logarithme[a_, x_] := -1 + logarithme[a, a x] /; x < 1
logarithme[10, 3457]
```

```
3 + logarithme[10, 3457/1000]
```

```
logarithme[10, 1/3457]
```

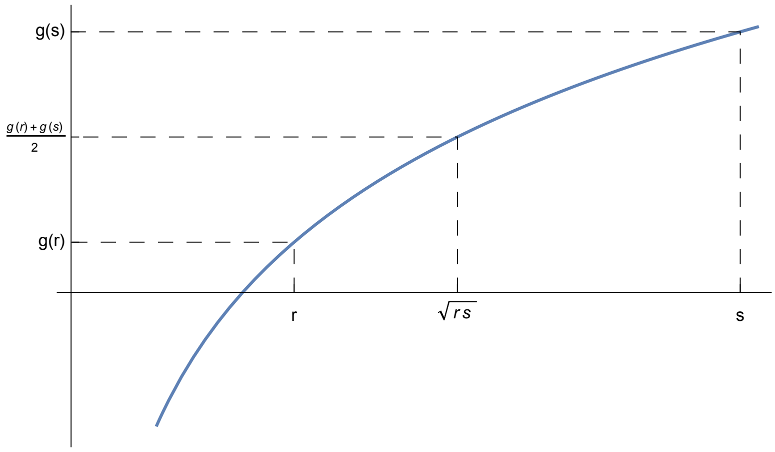
```
-4 + logarithme[10, 10000/3457]
```

Corrigé de l'exercice 3-2

```
Clear[logarithme];
```
efface

```
logarithme[a_, x_] := 1 + logarithme[a, x/a] /; x ≥ a;
logarithme[a_, x_] := -1 + logarithme[a, a x] /; x < 1
```

A chaque étape, on connaît un encadrement sur l'axe des abscisses r, s ($r \leq x < s$)
et un encadrement sur l'axe des ordonnées gr, gs.
A tout moment, tous les nombres *x, r, s, gr, gs* ont des valeurs numériques connues.
Par contre, le nombre g(x) est inconnu mais on sait que $gr \leq g(x) < gs$.
Au départ, on a {r, s, gr, gs} = {1, a, 0, 1}.
Une étape du calcul consiste donc à passer de l'encadrement par les 4 nombres {r, s, gr, gs} à l'encadrement suivant c'est-à-dire à définir le successeur de {r, s, gr, gs}.



Si $x < \sqrt{r\,s}$ alors le successeur est $\{r, \sqrt{r\,s}, gr, \frac{gr+gs}{2}\}$

sinon le successeur est $\{\sqrt{r\,s}, s, \frac{gr+gs}{2}, gs\}$.

Le successeur dépendant de x, nous le noterons successeur[x].

```
Clear[successeur];
efface
successeur[x_][{r_, s_, gr_, gs_}] := If[x < √(r s), N[{r, √(r s), gr, (gr + gs)/2}],
                                      si              valeur numérique
    N[{√(r s), s, (gr + gs)/2, gs}]];
    valeur numérique
```

```
TableForm[NestList[successeur[3.457], {1, 10, 0, 1}, 16],
forme de ta··· liste d'imbrication
 TableHeadings → {None, {"r", "s", "g(r)", "g(s)"}}]
 en-têtes de table   aucun
```

r	s	g(r)	g(s)
1	10	0	1
3.16228	10.	0.5	1.
3.16228	5.62341	0.5	0.75
3.16228	4.21697	0.5	0.625
3.16228	3.65174	0.5	0.5625
3.39821	3.65174	0.53125	0.5625
3.39821	3.52269	0.53125	0.546875
3.39821	3.45989	0.53125	0.539063
3.42891	3.45989	0.535156	0.539063
3.44437	3.45989	0.537109	0.539063
3.45212	3.45989	0.538086	0.539063
3.456	3.45989	0.538574	0.539063
3.456	3.45795	0.538574	0.538818
3.45698	3.45795	0.538696	0.538818
3.45698	3.45746	0.538696	0.538757
3.45698	3.45722	0.538696	0.538727
3.45698	3.4571	0.538696	0.538712

Le calcul peut se poursuivre tant que $r < s$ *et* $gr < gs$

Un critère d'arrêt des calculs est $r \geq s$ *ou* $gr \geq gs$

```
Clear[arret];
arret[{r1_, s1_, gr1_, gs1_}, {r2_, s2_, gr2_, gs2_}] := r2 ≥ s2 ∨ gr2 ≥ gs2
logarithme[a_, x_] := Last[FixedPoint[successeur[x], {1, a, 0, 1}, SameTest → arret]]
```

```
logarithme[10, 3457]
```

3.5387

```
logarithme[10, 3457] - Log[10, 3457]
```

8.43769×10^{-15}

$$\text{logarithme}\left[10, \frac{1}{3457}\right]$$

-3.5387

$$\text{logarithme}\left[10, \frac{1}{3457}\right] - \text{Log}\left[10, \frac{1}{3457}\right]$$

5.77316×10^{-15}

Corrigé de l'exercice 3-3

Il s'agit de compléter le programme donné dans le cours.
Un rajout doit être fait au début du programme pour les cas a = 1 et 0 < a < 1.
Le reste du programme est inchangé.

```
Clear[expon];
expon[1, x_] := 1;
expon[1., x_] := 1.;
```

$$\text{expon}[a\_, x\_] := \frac{1}{\text{expon}\left[\frac{1}{a}, x\right]} \;/;\; 0 < a < 1$$

```
expon[1, x]
```

1

```
expon[1., x]
```

1.

$$\text{expon}\left[\frac{2}{3}, 2.47\right]$$

$$\frac{1}{\text{expon}\left[\frac{3}{2}, 2.47\right]}$$

```
expon[a_, x_] := a expon[a, x - 1] /; x ≥ 1;
```

$$\text{expon}[a\_, x\_] := \frac{\text{expon}[a, x + 1]}{a} \;/;\; x < 0$$

```
Clear[successeur];
successeur[x_][{p_, q_, fp_, fq_}] := If[x < (p + q)/2, N[{p, (p + q)/2, fp, √(fp * fq)}],
    N[{(p + q)/2, q, √(fp * fq), fq}]]

Clear[arret];
arret[{p1_, q1_, fp1_, fq1_}, {p2_, q2_, fp2_, fq2_}] := p2 ≥ q2 ∨ fp2 ≥ fq2

expon[a_, x_] := Last[FixedPoint[successeur[x], {0, 1, 1, a}, SameTest → arret]]

expon[2/3, 2.47]
```

0.367328

```
expon[2/3, 2.47] - (2/3)^2.47
```

-3.83027×10^{-15}

Corrigé de l'exercice 3-4

Il s'agit de compléter le programme donné dans l'exercice 3-2.
Un ajout doit être fait au début du programme pour traiter le cas *0 < a < 1.*
Le reste du programme demeure inchangé.

```
Clear[logarithme];
logarithme[a_, x_] := -logarithme[1/a, x] /; 0 < a < 1

logarithme[2/3, 3457]
```

-logarithme[3/2, 3457]

```
logarithme[a_, x_] := 1 + logarithme[a, x/a] /; x ≥ a;
logarithme[a_, x_] := -1 + logarithme[a, a x] /; x < 1

Clear[successeur];
successeur[x_][{r_, s_, gr_, gs_}] := If[x < √(r s), N[{r, √(r s), gr, (gr + gs)/2}],
    N[{√(r s), s, (gr + gs)/2, gs}]];

Clear[arret];
arret[{r1_, s1_, gr1_, gs1_}, {r2_, s2_, gr2_, gs2_}] := r2 ≥ s2 ∨ gr2 ≥ gs2
```

```
logarithme[a_, x_] := Last[FixedPoint[successeur[x], {1, a, 0, 1}, SameTest → arret]]
```

$$\texttt{logarithme}\left[\frac{2}{3}, 3457\right]$$

-20.0958

$$\texttt{logarithme}\left[\frac{2}{3}, 3457\right] - \texttt{Log}\left[\frac{2}{3}, 3457\right]$$

-6.03961×10^{-14}

Corrigé de l'exercice 4-1 (facultatif)

On suppose ici que $0 \leq x \leq \pi$.

```
Clear[successeur];
```

$$\texttt{successeur[x\_][\{a\_, b\_, cb\_, ca\_\}]} := \texttt{If}\left[x < \frac{a+b}{2}, \texttt{N}\left[\left\{a, \frac{a+b}{2}, \frac{\sqrt{(1+ca)(1+cb)} - \sqrt{(1-ca)(1-cb)}}{2}, ca\right\}\right], \texttt{N}\left[\left\{\frac{a+b}{2}, b, cb, \frac{\sqrt{(1+ca)(1+cb)} - \sqrt{(1-ca)(1-cb)}}{2}\right\}\right]\right]$$

```
Clear[arret];
arret[{a1_, b1_, cb1_, ca1_}, {a2_, b2_, cb2_, ca2_}] := a2 ≥ b2 ∨ cb2 ≥ ca2
```

```
Clear[cosinus];
cosinus[x_] := Last[FixedPoint[successeur[x], {0, π, -1, 1}, SameTest → arret]]
```

```
cosinus[2.]
```

-0.416147

```
cosinus[2.] - Cos[2.]
```

-1.94844×10^{-14}