

Thème : § 3 Circuits RLC

Lien vers les énoncés des exercices :

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/complexes/3-Circuits_RLC.pdf

Corrigé de l'exercice 3-1 a)

Admittance complexe du condensateur

$$\underline{Y}_C = \frac{\omega C}{-i} = i \omega C$$

Impédance de l'association R, L en série

$$\underline{Z}_{RL} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + i \omega L$$

$$Z_{RL} = \left| \underline{Z}_{RL} \right| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\text{Arg}(\underline{Z}_{RL}) = \text{Arctan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Admittance complexe de l'association R, L en série

$$\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{\underline{Z}_{RL}} = \frac{1}{R + i \omega L} = \frac{(R - i \omega L)}{(R + i \omega L)(R - i \omega L)} = \frac{(R - i \omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - i \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Admittance complexe du circuit (association en parallèle)

$$\underline{Y} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_{RL} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \left(\frac{\omega C (R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

Admittance réelle du circuit

$$Y = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2}$$

Déphasage du courant à travers le générateur

$$\varphi = -\text{Arg}(\underline{Y}) = \text{Arctan}\left(\frac{\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2)}{R}\right)$$

Forme polaire de l'admittance complexe du circuit

$$\underline{Y} = Y e^{-i \varphi}$$

Courant complexe à travers le générateur

$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y} = \hat{U} e^{i \omega t} Y e^{-i \varphi} = \hat{U} Y e^{i (\omega t - \varphi)}$$

Intensité du courant à travers le générateur

$$\hat{I} = \hat{U} Y = \hat{U} \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2}$$

Forme polaire de l'admittance

$$\underline{Y}_{RL} = Y_{RL} e^{-i \varphi_1} \quad \text{où}$$

$$Y_{RL} = \left| \frac{1}{R + i \omega L} \right| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{et}$$

$$\varphi_1 = -\text{Arg} \left(Y_{RL} \right) = \text{Arg} \left(Z_{RL} \right) = \text{Arg} \left(R + i \omega L \right) = \text{Arctan} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

Courant complexe à travers R et L

$$\underline{I}_1 = \underline{U} Y_{RL} = \hat{U} e^{i \omega t} Y_{RL} e^{-i \varphi_1} = \hat{U} Y_{RL} e^{i (\omega t - \varphi_1)}$$

Le déphasage du courant I_1 est égal à φ_1 et son intensité est

$$\hat{I}_1 = \hat{U} Y_{RL} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Tension complexe aux bornes de la bobine

$$\underline{U}_L = Z_L \underline{I}_1 = i \omega L \hat{I}_1 e^{i (\omega t - \varphi_1)} = \omega L e^{i \frac{\pi}{2}} \hat{I}_1 e^{i (\omega t - \varphi_1)} = \omega L \hat{I}_1 e^{i (\omega t - \varphi_1 + \frac{\pi}{2})} = \hat{U}_L e^{i (\omega t - \psi)}$$

Amplitude de la tension aux bornes de la bobine

$$\hat{U}_L = \omega L \hat{I}_1 = \frac{\omega L \hat{U}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Retard de phase de la tension aux bornes de la bobine (par rapport à la tension aux bornes du générateur)

$$\psi = \varphi_1 - \frac{\pi}{2} = \text{Arctan} \left(\frac{\omega L}{R} \right) - \frac{\pi}{2}$$

Corrigé de l'exercice 3-1 b)

Pour R, L, C donnés, l'admittance est une fonction de ω

Clear [y];

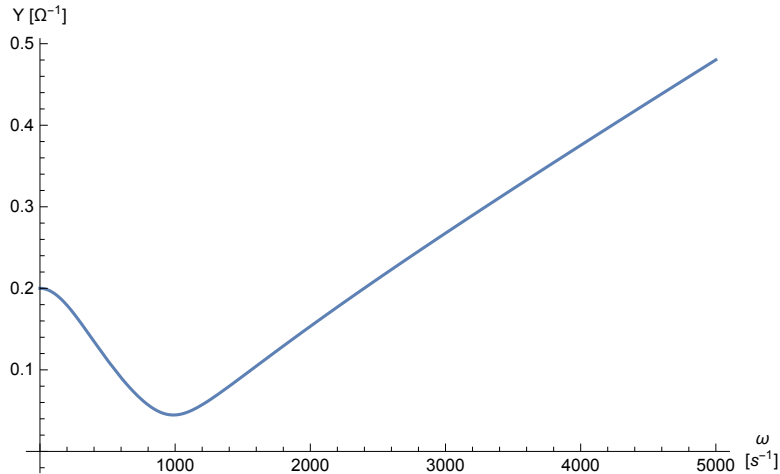
efface

$$y[\omega_] := \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2} /. \{R \rightarrow 5, L \rightarrow 0.01, C \rightarrow 10^{-4}\}$$

constante C

Courbe d'antirésonance

```
Plot[y[ω], {ω, 0, 5000}, AxesOrigin -> {0, 0},
-1]", "Y [Ω-1]", ImageSize -> {400, 300}, PlotRange -> All]
|titre d'axe |taille d'image |zone de tracé |tout
```



```
Limit[y[ω], ω -> 0]
```

```
|limite
```

```
0.2
```

```
Limit[y[ω], ω -> ∞]
```

```
|limite
```

```
∞
```

Lorsque la fréquence du générateur est proche de la fréquence d'antirésonance du circuit, l'admittance du circuit est minimale, l'impédance est maximale et le *courant est minimal*. En particulier, le circuit laisse bien passer les courants de haute fréquence.

Pulsation d'antirésonance

```
ωr = ω /. FindRoot[y' [ω] == 0, {ω, 500, 2000}]
```

```
|trouve racine
```

```
987.292
```

On remarquera que la pulsation d'antirésonance n'est pas égale à $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 \text{ s}^{-1}$, mais proche

de $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

La fréquence d'antirésonance, exprimée en Hertz, est

```
vr = ωr / (2 π)
```

```
157.132
```

Valeur minimale de l'admittance [Ω⁻¹]

```
y[ωr]
```

```
0.0446643
```

Etude de la fonction

Le package **EtudeFct** offre diverses procédures pour faire des études de fonctions, en particulier pour dresser un tableau de variations.

Pour avoir accès au package, il suffit de connaître son adresse web:

```
Needs ["EtudeFct`",
[nécessite
"https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/EtudeFct.m"]
```

Pour ne pas oublier d'exécuter ces instructions au début de chaque session de travail, il est conseillé de déclarer les instructions **Needs** comme étant des cellules d'initialisation. Pour ce faire, sélectionnez les cellules voulues puis passez par le menu

Cell / Cell properties / Initialization cell

```
Clear[y];
```

[efface

$$y[\omega_] = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2} /. \{R \rightarrow 5, L \rightarrow 0.01, C \rightarrow 10^{-4}\}$$

[constante C

$$\sqrt{\frac{25}{(25 + 0.0001 \omega^2)^2} + \left(\frac{\omega}{10000} - \frac{0.01 \omega}{25 + 0.0001 \omega^2}\right)^2}$$

```
Reduce[y'[ω] == 0 & ω > 0, ω, Reals]
```

[réduis

[nombres

```
ω == 987.292
```

```
cond[ω_] = ω > 0; restreins[cond]
```

```
x > 0
```

```
Ntv[y]
```

Ensemble de définition de f : $x > 0$.

$$f(x) = \sqrt{\frac{25.}{(25. + 0.0001 x^2)^2} + \left(0.0001 x - \frac{0.01 x}{25. + 0.0001 x^2}\right)^2}$$

Signe($f(x)$) :

<i>négatif pour</i>	$x \in \{\}$
<i>nul pour</i>	$x \in \{\}$
<i>positif pour</i>	$x > 0$

$$f'(x) = \left(1. (-3.59375 \times 10^{17} x - 1.3125 \times 10^{12} x^3 + 750000. x^5 + 1. x^7) \right. \\ \left. \sqrt{\frac{25.}{(25. + 0.0001 x^2)^2} + \left(0.0001 x - \frac{0.01 x}{25. + 0.0001 x^2}\right)^2} \right) / \\ ((250000. + 1. x^2) (2.5 \times 10^{17} + 5.625 \times 10^{11} x^2 - 1.5 \times 10^6 x^4 + 1. x^6))$$

Signe($f'(x)$) :

<i>négatif pour</i>	$0 < x < 987.292$
<i>nul pour</i>	$x = 987.292$
<i>positif pour</i>	$x > 987.292$

$f''(x) =$

$$\left(1. (-2.24609 \times 10^{40} + 2.34375 \times 10^{34} x^2 + 8.67188 \times 10^{29} x^4 + 5. \times 10^{23} x^6 - 3. \times 10^{18} x^8 + 6. \times 10^{12} x^{10} - \right. \\ \left. 2. \times 10^6 x^{12} + 1.11022 \times 10^{-16} x^{14}) \sqrt{\frac{25.}{(25. + 0.0001 x^2)^2} + \left(0.0001 x - \frac{0.01 x}{25. + 0.0001 x^2}\right)^2} \right) / \\ ((250000. + 1. x^2)^2 (2.5 \times 10^{17} + 5.625 \times 10^{11} x^2 - 1.5 \times 10^6 x^4 + 1. x^6)^2)$$

Signe($f''(x)$) :

<i>négatif pour</i>	$0 < x < 382.019 \quad \quad x > 1568.78$
<i>nul pour</i>	$x = 382.019 \quad \quad x = 1568.78$
<i>positif pour</i>	$382.019 < x < 1568.78$

Candidat(s) extremum(s) : $\{\{987.292, 0.0446643\}\}$

Candidat(s) points(s) d'inflexion : $\{\{382.019, 0.139083\}, \{1568.78, 0.100715\}\}$

Du côté $+\infty$, asymptote affine $y = (0.0001)x + (0.)$

Du côté $-\infty$, fonction non définie.

Corrigé de l'exercice 3-2 a)

La tension de sortie U_s est mesurée en l'absence de courant de sortie. Autrement dit, U_s est interprété comme un interrupteur ouvert dont on demande la tension aux bornes. Dans le circuit, les trois composants passifs sont disposés en série. L'impédance complexe du circuit est

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + \mathfrak{i} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Comme tension complexe, choisissons

$$\underline{U} = \hat{U}_e e^{\mathfrak{i} \omega t}$$

Le courant complexe s'écrit alors

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{U}_e e^{\mathfrak{i} \omega t}}{Z e^{\mathfrak{i} \varphi}} = \frac{\hat{U}_e}{Z} e^{\mathfrak{i} (\omega t - \varphi)} \quad \text{où} \quad \varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$$

La tension de sortie U_s est la tension aux bornes de l'assemblage RL. Calculons d'abord l'impédance complexe RL:

$$\underline{Z}_{RL} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + \mathfrak{i} \omega L$$

En coordonnées cartésiennes, l'atténuation complexe de la tension de sortie s'écrit

$$\underline{a} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} =$$

$$\frac{\underline{Z}_{RL} \underline{I}}{\underline{Z} \underline{I}} = \frac{\underline{Z}_{RL}}{\underline{Z}} = \frac{R + \mathfrak{i} \omega L}{R + \mathfrak{i} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{(R + \mathfrak{i} \omega L) \left(R - \mathfrak{i} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \frac{\left(-\frac{L}{C} + R^2 + L^2 \omega^2 \right) + \mathfrak{i} \frac{R}{C \omega}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

En coordonnées polaires et en notant ψ le déphasage, l'atténuation complexe de la tension de sortie s'écrit

$$\underline{a} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\hat{U}_s e^{\mathfrak{i} (\omega t - \psi)}}{\hat{U}_e e^{\mathfrak{i} \omega t}} = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_e} e^{\mathfrak{i} \psi}$$

$$a = |\underline{a}| = \frac{|\underline{Z}_{RL}|}{|\underline{Z}|} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\psi = \text{Arg}(\underline{a}) = \text{Arg} \left(\frac{R + \mathfrak{i} \omega L}{R + \mathfrak{i} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \right) = \text{Arg} \left(\left(-\frac{L}{C} + R^2 + L^2 \omega^2 \right) + \mathfrak{i} \frac{R}{C \omega} \right)$$

On peut maintenant calculer la tension de sortie sous la forme complexe:

$$\underline{U}_s = \underline{a} \underline{U}_e = a e^{\mathfrak{i} \psi} \hat{U}_e e^{\mathfrak{i} \omega t} = a \hat{U}_e e^{\mathfrak{i} (\omega t + \psi)} = \frac{\underline{Z}_{RL} \hat{U}_e}{\underline{Z}} e^{\mathfrak{i} (\omega t + \psi)}$$

Corrigé de l'exercice 3-2 b)

R, L, C étant donnés, l'atténuation complexe est une fonction de ω .

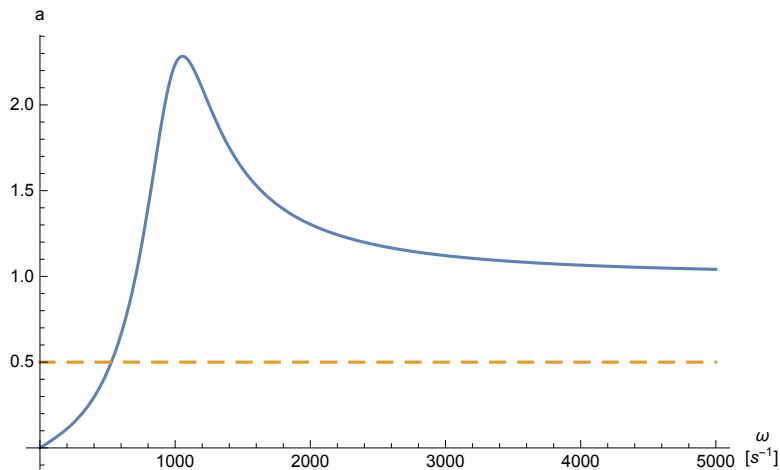
Clear[ac, R, L, ω]

|efface

$$\text{ac}[\omega_-] := \frac{R + i \omega L}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} /. \{R \rightarrow 5, L \rightarrow 0.01, C \rightarrow 10^{-4}\}$$

[constante C]

```
Plot[{Abs[ac[ω]], 1/2}, {ω, 0, 5000}, PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.02}]},
-1]", "a"}, ImageSize → {400, 300}
origine des axes titre d'axe taille d'image
```



```
Reduce[Abs[ac[ω]] ≤ 1/2 ∧ ω > 0, ω, Complexes]
réduis valeur absolue complexes
```

$$0 < \omega \leq 528.039$$

Les basses fréquences sont fortement atténuées. L'atténuation est inférieure à 50 % pour $\omega \leq 528 \text{ s}^{-1}$ (voir figure).

```
Reduce[Abs[ac[ω]] > 1 ∧ ω > 0, ω, Complexes]
réduis valeur absolue complexes
```

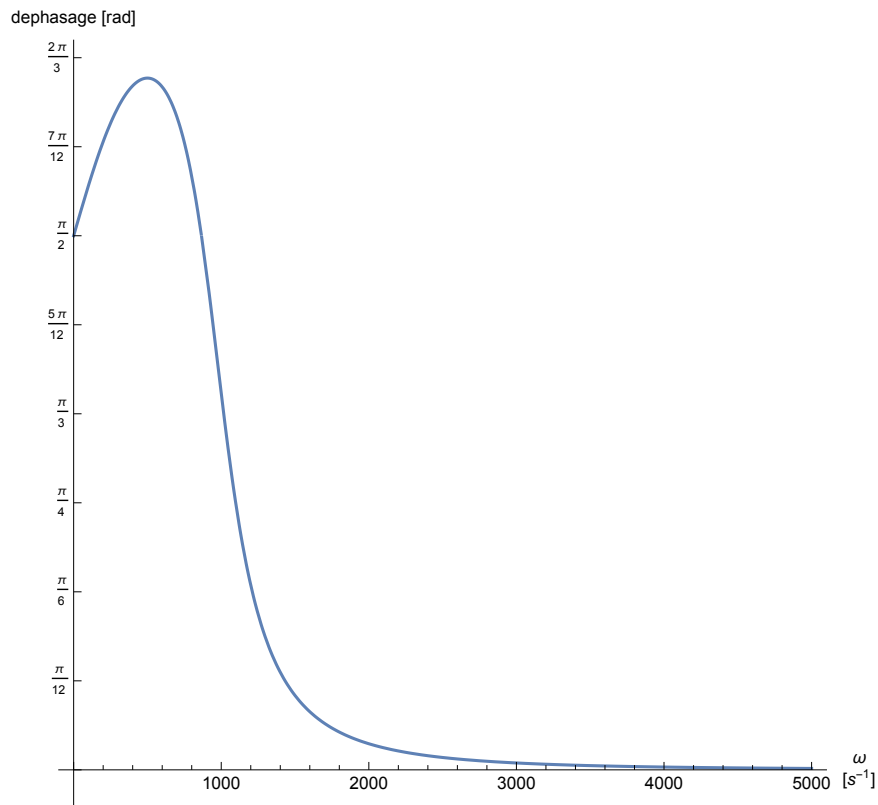
$$\omega > 707.107$$

Pour $\omega > 707.1 \text{ s}^{-1}$, le signal est amplifié. Il s'agit donc bien d'un filtre passe haut.
Pour R, L, C donnés, le déphasage de la tension de sortie est une fonction de ω

```

Plot[Arg[ac[ $\omega$ ]], { $\omega$ , 0, 5000}, AxesOrigin -> {0, 0},
\omega [s-1]", "dephasage [rad]"},
  [titre d'axe]
  Ticks -> {Automatic, Range[- $\pi$ ,  $\pi$ ,  $\frac{\pi}{12}$ ]}, AspectRatio -> 1, ImageSize -> {450, 450}
  [graduati... [automatique] [page] [rapport d'aspect] [taille d'image]

```



Corrigé de l'exercice 3-3 a) et b)

Admittance du premier bloc (association en parallèle)

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + i \omega L_1} + \frac{1}{-\frac{i}{\omega C_1}} = \frac{1}{R_1 + i \omega L_1} - \frac{\omega C_1}{i} = \frac{1}{R_1 + i \omega L_1} - \frac{i \omega C_1}{i^2} = \\ &= \frac{1}{R_1 + i \omega L_1} + i \omega C_1 = \frac{1 + i \omega C_1 (R_1 + i \omega L_1)}{R_1 + i \omega L_1} = \frac{(1 - \omega^2 L_1 C_1) + i \omega R_1 C_1}{R_1 + i \omega L_1} \end{aligned}$$

Impédance du premier bloc

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{1}{\underline{Y}_1} = \frac{R_1 + i \omega L_1}{(1 - \omega^2 L_1 C_1) + i \omega R_1 C_1} = \\ &= \frac{(R_1 + i \omega L_1) ((1 - \omega^2 L_1 C_1) - i \omega R_1 C_1)}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2 + (\omega R_1 C_1)^2} = \frac{R_1 + i \omega (L_1 - \omega^2 C_1 L_1^2 - C_1 R_1^2)}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2 + (\omega R_1 C_1)^2} \end{aligned}$$

Impédance complexe du deuxième bloc (association en série)

$$\underline{Z}_2 = R_2 + i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)$$

Avec les données numériques, l'impédance et le déphasage sont des fonctions de ω

subst = {R₁ → 5, R₂ → 5, L₁ → 0.01, L₂ → 0.01, C₁ → 100 × 10⁻⁶, C₂ → 100 × 10⁻⁶};

$$\text{z2c}[\omega_] := R_2 + i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) /. \text{subst}$$

z2c[ω]

$$5 + i \left(-\frac{10000}{\omega} + 0.01 \omega \right)$$

Impédance totale complexe (association en série)

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \frac{R_1 + i \omega (L_1 - \omega^2 C_1 L_1^2 - C_1 R_1^2)}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2 + (\omega R_1 C_1)^2} + R_2 + i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = \\ &= \left(\frac{R_1}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2 + (\omega R_1 C_1)^2} + R_2 \right) + i \left(\frac{\omega (L_1 - \omega^2 C_1 L_1^2 - C_1 R_1^2)}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2 + (\omega R_1 C_1)^2} + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right) \end{aligned}$$

zc[$\omega_$] :=

$$\left(\frac{R_1}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2 + (\omega R_1 C_1)^2} + R_2 \right) + i \left(\frac{\omega (L_1 - \omega^2 C_1 L_1^2 - C_1 R_1^2)}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2 + (\omega R_1 C_1)^2} + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right) /. \text{subst}$$

zc[ω]

$$5 + \frac{5}{\frac{\omega^2}{4000000} + (1 - 1. \times 10^{-6} \omega^2)^2} + i \left(-\frac{10000}{\omega} + 0.01 \omega + \frac{\omega (0.0075 - 1. \times 10^{-8} \omega^2)}{\frac{\omega^2}{4000000} + (1 - 1. \times 10^{-6} \omega^2)^2} \right)$$

Impédance totale réelle

$$Z = | \underline{Z} |$$

Atténuation réelle

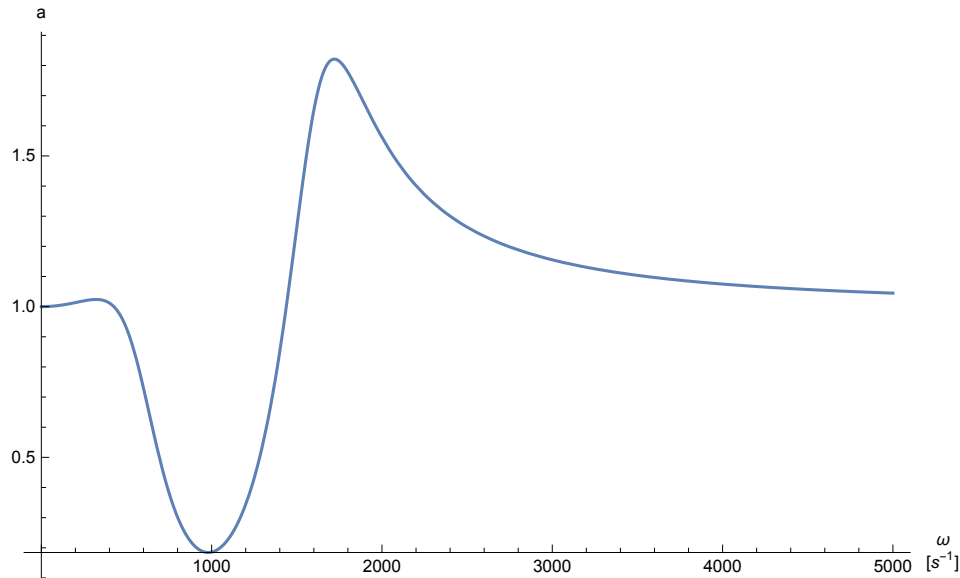
$$a = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_e} = \frac{| \underline{U}_s |}{| \underline{U}_e |} = \left| \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \right| = \left| \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}}{\underline{Z} \underline{I}} \right| = \left| \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}} \right|$$

$$a[\omega_] := \text{Abs}\left[\frac{z2c[\omega]}{zc[\omega]}\right]$$

[valeur absolue]

Plot[a[ω], {ω, 0, 5000}, AxesLabel → {"ω\n[s⁻¹]", "a"}, ImageSize → {500, 300}]

[tracé de courbes] [titre d'axe] [taille d'image]



Reduce[a[ω] < 1/2 & ω > 0, ω, Complexes]

[réduis] [complexes]

$$693.11 < \omega < 1282.07$$

L'atténuation est inférieure à $\frac{1}{2}$ pour $693.1 \text{ s}^{-1} < \omega < 1282.1 \text{ s}^{-1}$.

Considérons maintenant l'atténuation complexe. D'une part, sous la forme cartésienne, cette atténuation est

$$\underline{a} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}}$$

D'autre part, en notant ψ le déphasage de la tension de sortie, cette atténuation s'écrit comme suit sous la forme polaire

$$\underline{a} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\hat{U}_s e^{i(\omega t + \psi)}}{\hat{U}_e e^{i\omega t}} = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_e} e^{i\psi} = a e^{i\psi}$$

Il s'ensuit que

$$\psi = \text{Arg}(\underline{a}) = \text{Arg}\left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}}\right)$$

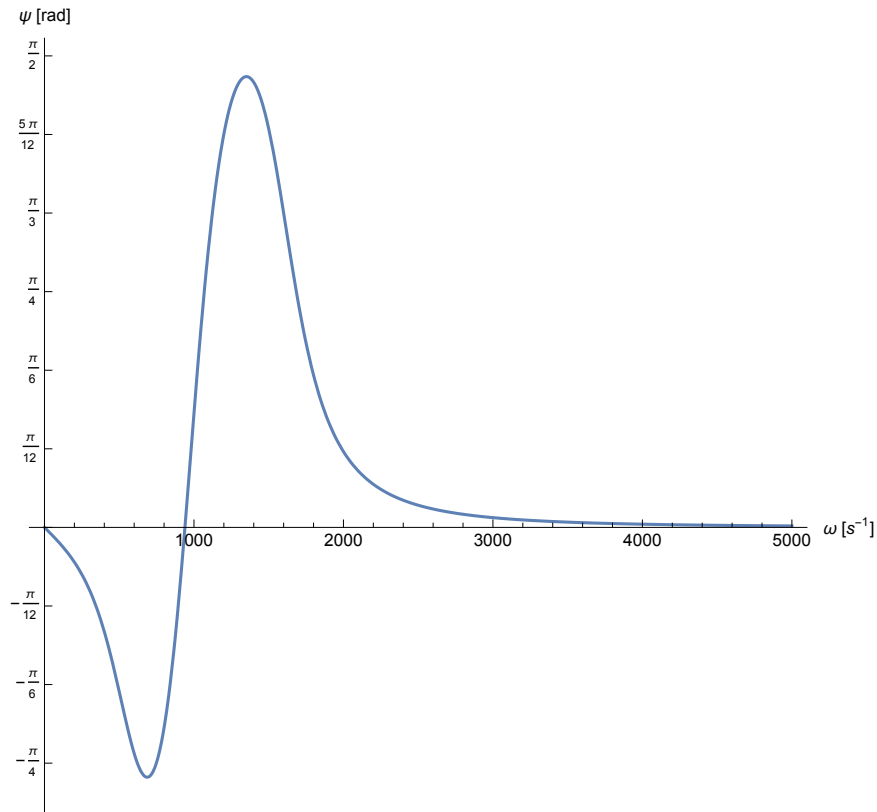
$$\psi[\omega_] := \text{Arg}\left[\frac{z2c[\omega]}{zc[\omega]}\right]$$

[argument]

`Plot[$\psi[\omega]$, { ω , 0, 5000}, AxesLabel → {" ω [s^{-1}]", " ψ [rad]"},`
[tracé de courbes] [titre d'axe]

`Ticks → {Automatic, Range[- π , π , $\frac{\pi}{12}$]}, AspectRatio → 1,`
[graduati... [automatique [page] [rapport d'aspect]

`ImageSize → {450, 450}, PlotRange → All]`
[taille d'image] [zone de tracé] [tout]



Corrigé de l'exercice 3-4

Si on décrète que U_s ne délivre pas de courant, on commence par étudier le circuit en ignorant l'arc où se trouve U_s . Il s'agit d'une association en parallèle de deux blocs. Le premier bloc a pour impédance

$$\underline{Z}_1 = R + R = 2R$$

l'impédance du deuxième bloc est

$$\underline{Z}_2 = r - \text{i} \frac{1}{\omega C}$$

L'admittance du deuxième bloc est

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{r - \text{i} \frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega C}{\omega r C - \text{i}} = \frac{\omega C (\omega r C + \text{i})}{(\omega r C)^2 + 1}$$

L'admittance totale est

$$\underline{Y} = \frac{1}{2R} + \underline{Y}_2 = \left(\frac{1}{2R} + \frac{\omega^2 r C^2}{(\omega r C)^2 + 1} \right) + \text{i} \frac{\omega C}{(\omega r C)^2 + 1}$$

Le courant complexe contient deux informations : l'intensité du courant et le déphasage du courant

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} \underline{Y}$$

$$I = U_e | Y |$$

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{Z}) = -\text{Arg}(\underline{Y})$$

Tension de sortie

Pour calculer U_s , considérons la petite boucle en bas à droite, celle qui est formée par les composants U_s , R et r . Orientons cette boucle dans le sens direct. En supposant que le courant I circule dans le sens direct, le sens de I_1 est rétrograde tandis que celui de I_2 est direct.

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= -R \underline{I}_1 + r \underline{I}_2 = \\ -R \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_1} + r \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_2} &= \underline{U}_e \left(-R \frac{1}{2R} + r \underline{Y}_2 \right) = \underline{U}_e \left(-\frac{1}{2} + r \left(\frac{\omega^2 r C^2}{(\omega r C)^2 + 1} + \text{i} \frac{\omega C}{(\omega r C)^2 + 1} \right) \right) \end{aligned}$$

Le déphasage ψ de la tension de sortie est définie en comparant

$$\underline{U}_e = \hat{U}_e e^{\text{i} \omega t}$$

$$\underline{U}_s = \hat{U}_s e^{\text{i} (\omega t - \psi)}$$

Aussi est-il avantageux de considérer l'atténuation complexe de la tension de sortie

$$\underline{a} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\hat{U}_s e^{\text{i} (\omega t - \psi)}}{\hat{U}_e e^{\text{i} \omega t}} = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_e} e^{\text{i} \psi}$$

$$\underline{a} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = -\frac{1}{2} + r \left(\frac{\omega^2 r C^2}{(\omega r C)^2 + 1} + \text{i} \frac{\omega C}{(\omega r C)^2 + 1} \right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{(\omega r C)^2}{(\omega r C)^2 + 1} \right) + \text{i} \frac{\omega r C}{(\omega r C)^2 + 1}$$

De l'atténuation complexe, on tire l'atténuation réelle

$$a = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_e} = | \underline{a} | = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{(\omega r C)^2}{(\omega r C)^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{\omega r C}{(\omega r C)^2 + 1}\right)^2}$$

Simplify [$\sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{(\omega r C)^2}{(\omega r C)^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{\omega r C}{(\omega r C)^2 + 1}\right)^2}$]

[simplifie]

$$\frac{1}{2}$$

De l'atténuation complexe, on déduit aussi le déphasage de la tension de sortie

$$\psi = \text{Arg}(\underline{a}) = \text{Arg}\left(-\frac{1}{2} + \frac{(\omega r C)^2}{(\omega r C)^2 + 1} + \text{i} \frac{\omega r C}{(\omega r C)^2 + 1}\right)$$

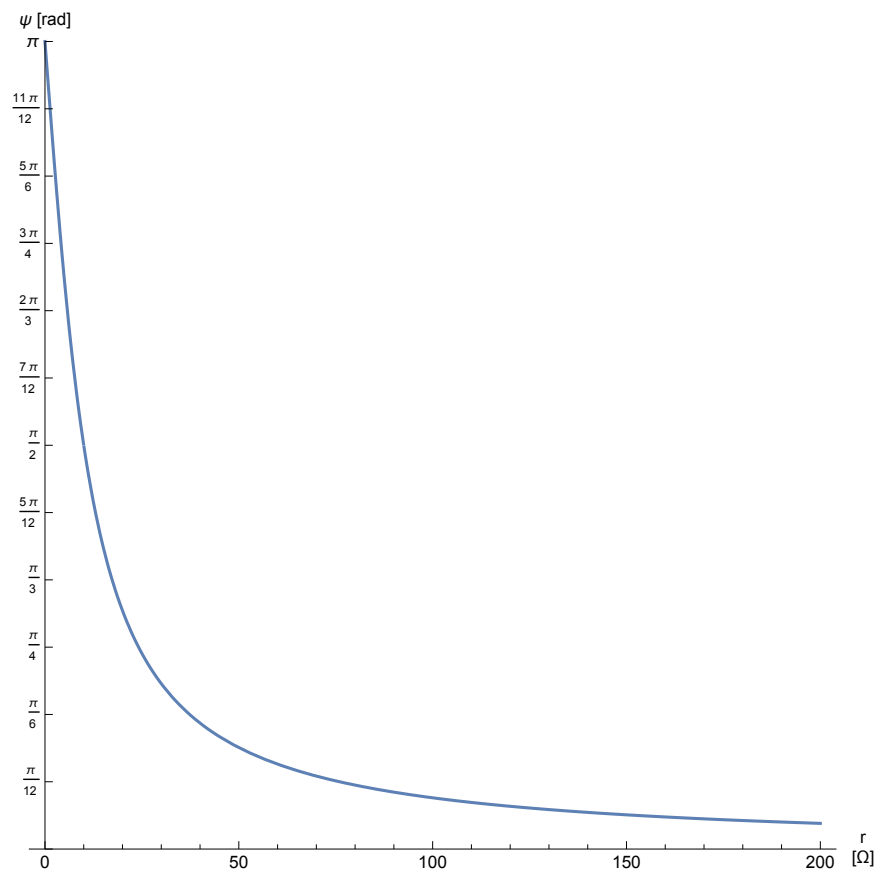
Pour des valeurs fixées de R, C, et ω , le déphasage est une fonction de r. Par exemple,

$$\psi[r_] := \text{Arg}\left[-\frac{1}{2} + \frac{(\omega r C)^2}{(\omega r C)^2 + 1} + \text{i} \frac{\omega r C}{(\omega r C)^2 + 1}\right] /. \{R \rightarrow 5, C \rightarrow 100 \times 10^{-6}, \omega \rightarrow 1000\}$$

[argument] [constante C]

```
Plot[ψ[r], {r, 0, 200}, AxesLabel → {"r\n[Ω]", "ψ [rad]"},


```



Par un choix convenable de r , il est possible d'obtenir n'importe quel déphasage $\psi \in]0, \pi]$ sans modifier la tension de sortie. C'est pourquoi le circuit est appelé déphaseur.

Corrigé de l'exercice 3- R 1, partie a)

Impédance complexe de la bobine

$$\underline{Z}_1 = k R + \dot{i} k \omega L = k (R + \dot{i} \omega L)$$

Impédance réelle de la bobine

$$Z_1 = k \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Courant de crête dans la bobine

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{Z_1} = \frac{\hat{U}}{k \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Corrigé de l'exercice 3 - R 1, partie b)

Admittance complexe de la bobine

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{k (R + \dot{i} \omega L)}$$

Admittance complexe du condensateur

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{\frac{-\dot{i}}{\omega C}} = \dot{i} C \omega$$

Admittance complexe de l'assemblage en parallèle

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{k (R + \dot{i} \omega L)} + \dot{i} C \omega$$

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1 + \dot{i} C \omega k (R + \dot{i} \omega L)}{k (R + \dot{i} \omega L)} = \frac{(1 - k \omega^2 L C) + \dot{i} k R C \omega}{k (R + \dot{i} \omega L)} = \frac{((1 - k \omega^2 L C) + \dot{i} k R C \omega) (R - \dot{i} \omega L)}{k (R + \dot{i} \omega L) (R - \dot{i} \omega L)} = \\ &= \frac{1}{k (R^2 + L^2 \omega^2)} \left(((1 - k \omega^2 L C) R + k R C \omega \omega L) + \dot{i} \left((1 - k \omega^2 L C) (-\omega L) + k R C \omega R \right) \right) = \\ &= \frac{R + \dot{i} (-L \omega + C k R^2 \omega + C k L^2 \omega^3)}{k (R^2 + L^2 \omega^2)} \end{aligned}$$

$$\underline{Y} = \frac{R + \dot{i} (-L \omega + C k R^2 \omega + C k L^2 \omega^3)}{k (R^2 + L^2 \omega^2)}$$

L'admittance réelle est le module de l'admittance complexe

$$Y = |\underline{Y}| = \frac{\sqrt{R^2 + (-L \omega + C k R^2 \omega + C k L^2 \omega^3)^2}}{k (R^2 + L^2 \omega^2)}$$

Impédance complexe de l'assemblage en parallèle

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

Impédance réelle de l'assemblage

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{k (R^2 + L^2 \omega^2)}{\sqrt{R^2 + (-L \omega + C k R^2 \omega + C k L^2 \omega^3)^2}}$$

Corrigé de l'exercice 3 - R 1, partie c)

```
SetOptions[Plot, ImageSize -> {400, 250}];
```

```
[alloue options [tracé· [taille d'image
```

```
Unprotect[C];
```

```
[déprotège [constante C
```

```
Clear[z, k];
```

```
[efface
```

```
 $\omega = 20000$ ;  $C = 10^{-5}$ ;  $R = 5$ ;  $L = 10^{-3}$ ;
```

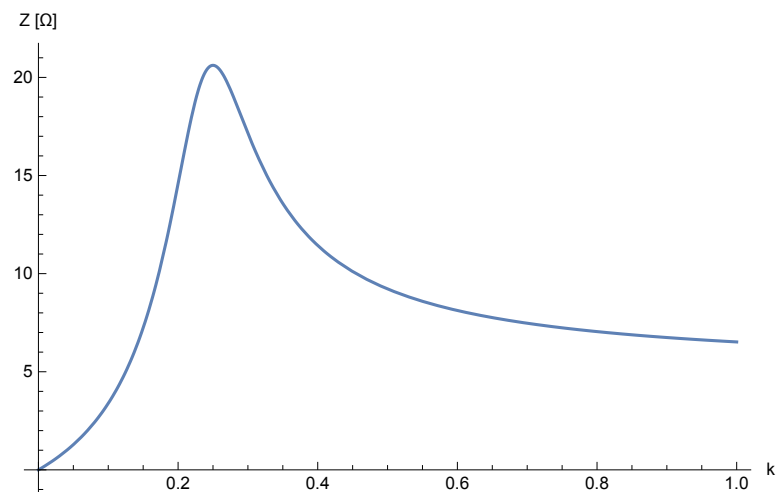
```
[constante C
```

$$z[k_] := \frac{k (R^2 + L^2 \omega^2)}{\sqrt{R^2 + (-L \omega + C k R^2 \omega + C k L^2 \omega^3)^2}}$$

```
Plot[z[k], {k, 0, 1}, AxesLabel -> {"k", "Z [Ω]"}]
```

```
[tracé de courbes
```

```
[titre d'axe
```



Réglage de k pour une impédance maximale

```
Reduce[z'[k] == 0, k, Reals]
```

```
[réduis
```

```
[nombres
```

$$k == \frac{1}{4}$$