Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Circuits RLC série
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/complexes/1-circuit_RLC_serie.pdf

Package Tableaux

Le package **Tableaux** offre diverses procédures pour afficher des tableaux incluant les titres de lignes et de colonnes, le formatage des cellules et la possibilité de tourner le tableau d'un quart de tour.

Pour avoir accès au package, il suffit de connaître son adresse web:

```
Needs["Tableaux`",
nécessite
  "https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Tableaux.m"]
```

Pour ne pas oublier d'exécuter ces instructions au début de chaque session de travail, il est conseillé de déclarer les instructions **Needs** comme étant des cellules d'initialisation. Pour ce faire, sélectionnez les cellules voulues puis passez par le menu

Cell / Cell properties / Initialization cell

Corrigé de l'exercice 1-1

Calculons d'abord la vitesse angulaire ω. Lorsqu'une roue de rayon r_1 roule sans glisser, la distance $v\,t$ effectuée par son centre durant l'intervalle $[0,\ t]$ est égale à la longueur de l'arc qui a été déroulé durant ce même temps $r_1\,\alpha = r_1\,\omega\,t$, donc

$$v\,t = r_1\,\omega\,t$$

$$v = r_1\,\omega$$

$$\omega = \frac{v}{r_1} = \frac{108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{0.2\,\text{m}} = \frac{108\,\frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}}}{0.2\,\text{m}} = \frac{108\,000}{0.2 * 3600\,\text{s}} = \frac{150}{\text{s}}$$

ce qui signifie que, durant chaque seconde, la roue tourne d'un angle de 150 radians.
La fréquence vaut

$$\nu = \frac{\omega}{2\,\pi} \simeq 23.87\,\text{s}^{-1} \simeq 23.87\,\text{Hz}$$

ce qui signifie que la roue accomplit environ 23.87 tours par seconde.
La période est de

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\,\pi}{\omega} \simeq 0.04189\,\text{s}$$

ce qui représente la durée d'un tour de roue.
On peut maintenant écrire les angles horaires des deux valves

$$\alpha_1\,(t) = \omega\,t + \varphi_1 = \frac{150}{\text{s}}\,t - \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_2\,(t) = \omega\,t + \varphi_2 = \frac{150}{\text{s}}\,t + \frac{\pi}{4}$$

Le déphasage entre les deux valves est un angle constant

$$\varphi = \alpha_1 (t) - \alpha_2 (t) = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

ce qui signifie que la première valve a un retard de $\frac{3\pi}{4}$ radians sur la deuxième.

Les horaires des valves, situées à une distance r_2 de l'axe, sont respectivement

$$\begin{pmatrix} x_1 (t) \\ y_1 (t) \end{pmatrix} = r_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \sin(\omega t + \varphi_1) \end{pmatrix} = 0.15\,\text{m} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{150}{s} t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{150}{s} t - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 (t) \\ y_2 (t) \end{pmatrix} = r_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \sin(\omega t + \varphi_2) \end{pmatrix} = 0.15\,\text{m} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{150}{s} t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{150}{s} t + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 1-2

Puisque le mouvement des aiguilles est uniforme, l'angle horaire de l'aiguille des heures est de la forme

$$\alpha_h (t) = \omega_h t + \varphi_h$$

La vitesse angulaire de l'aiguille des heures est de 1 tour en 12 heures dans le sens rétrograde

$$\omega_h = -1 \frac{\text{tour}}{12\,\text{h}} = -\frac{2\pi}{12\,\text{h}} = -\frac{\pi}{6\,\text{h}}$$

A l'heure $t = 0$, l'aiguille des heures est orientée vers le haut

$$\varphi_h = \frac{\pi}{2}$$

L'angle horaire de l'aiguille des heures est donc

$$\alpha_h (t) = -\frac{\pi}{6\,\text{h}} t + \frac{\pi}{2}$$

Interprétons l'angle horaire au moyen d'une table de valeurs particulières

t [h]	0	3	6	9
α_h(t) [rad]	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

L'angle horaire de l'aiguille des minutes est de la même forme

$$\alpha_m (t) = \omega_m t + \varphi_m$$

La vitesse angulaire de l'aiguille des minutes est de 1 tour par heure dans le sens rétrograde

$$\omega_m = -1 \frac{\text{tour}}{\text{h}} = -\frac{2\pi}{\text{h}}$$

A l'heure $t = 0$, l'aiguille des minutes est orientée vers le haut

$$\varphi_m = \frac{\pi}{2}$$

L'angle horaire de l'aiguille des heures est donc

$$\alpha_m (t) = -\frac{2\pi}{\text{h}} t + \frac{\pi}{2}$$

Interprétons l'angle horaire au moyen de tables de valeurs particulières

t [h]	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\alpha_m(t)$ [rad]	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

t [h]	4	$\frac{17}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{19}{4}$
$\alpha_m(t)$ [rad]	$-\frac{15\pi}{2}$	-8π	$-\frac{17\pi}{2}$	-9π

A l'instant $t = 4\,h$, l'angle horaire de $-\frac{15\pi}{2}$ signifie que, après avoir fait 4 tours, l'aiguille pointe vers le haut.

Partie b) Nous aimerions maintenant que, à l'instant $t = 4\,h$, l'angle horaire de l'aiguille des minutes indique $\frac{\pi}{2}$.

t [h]	4	$\frac{17}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{19}{4}$
$\alpha_m(t)$ [rad]	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

Dans l'angle horaire de l'aiguille des minutes, nous modifions l'angle initial.

Première méthode: la fonction affine $\alpha(t)$ de pente ω qui passe par $(t_0,\ \alpha_0)$ est $\alpha(t) = \omega\,(t - t_0) + \alpha_0$; ici

$$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{h}(t - 4\,h) + \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{h}t + \frac{17\pi}{2}$$

Deuxième méthode: calculons l'angle initial φ_m à partir de la condition

$$\alpha_m(4\,h) = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2\pi}{h}(4\,h) + \varphi_m = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_m = \frac{17\pi}{2}$$

$$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{h}t + \frac{17\pi}{2}$$

Partie c) Il y a deux situations dans lesquelles les aiguilles sont perpendiculaires:

* l'aiguille des minutes a une avance d'un quart de tour sur l'aiguille des heures;
* l'aiguille des minutes a un retard d'un quart de tour sur l'aiguille des heures.

En d'autres termes, les deux aiguilles sont déphasées de $\pm\frac{\pi}{2}$.

Premier cas:

$$\alpha_m(t) = \alpha_h(t) + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{-2\pi}{h}t + \frac{17\pi}{2} = \left(-\frac{\pi}{6\,h}t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{15\pi}{2} = \frac{11\pi}{6\,h}t$$

$$t = \frac{45\,h}{11} = 4\,h\,05\,min\,27.\overline{27}\,s$$

Deuxième cas:

$$\alpha_m(t) = \alpha_h(t) - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{-2\pi}{h}t + \frac{17\pi}{2} = \left(-\frac{\pi}{6\,h}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{17\,\pi}{2} = \frac{11\,\pi}{6\,\text{h}}\,t$$

$$t = \frac{51\,\text{h}}{11} = 4\,\text{h}\,38\,\text{min}\,10.\overline{90}\,\text{s}$$

Exercice 1-3

a)

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(0) + \omega_1\,t$$

b) Durant un intervalle de temps Δt donné, les longueurs d'arcs sur les deux cercles sont les mêmes

$$|r_1\,\Delta\alpha_1| = |r_2\,\Delta\alpha_2|$$

$$r_1\,\frac{|\Delta\alpha_1|}{\Delta t} = r_2\,\frac{|\Delta\alpha_2|}{\Delta t}$$

$$r_1\,|\omega_1| = r_2\,|\omega_2|$$

Les deux vitesses angulaires sont de signes opposés

$$\omega_2 = -\frac{r_1}{r_2}\,\omega_1$$

$$\alpha_2(0) = \pi$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(0) + \omega_2\,t = \pi - \frac{r_1}{r_2}\,\omega_1\,t$$

c) Mouvement harmonique qui approche le mouvement du point B :

comparons les positions extrêmes que peut prendre le point B : $x_{max} - x_{min} = 2\,r_2$;
il s'agit donc d'une oscillation d'amplitude r_2 autour d'une position centrale notée x_0;
à l'instant $t = 0$, on a $\alpha_2(0) = \pi$ et $x(0) - x_0 = -r_2 = r_2\cos(\alpha_2(0))$, d'où

$$x(t) - x_0 = r_2\cos(\alpha_2(t)) = r_2\cos\left(\pi - \frac{r_1}{r_2}\,\omega_1\,t\right)$$

$$y(t) = y_0$$

Numériquement,

$$x(t) - x_0 = 0.2\,\text{m}\cos\left(\pi - \frac{0.5}{0.2}\,\frac{300\times 2\,\pi}{60\,\text{s}}\,t\right) =$$

$$0.2\,\text{m}\cos\left(\pi - \frac{0.5}{0.2}\,\frac{300\times 2\,\pi}{60\,\text{s}}\,t\right) = 0.2\,\text{m}\cos\left(\pi - \frac{25\,\pi}{\text{s}}\,t\right) \simeq 0.2\,\text{m}\cos\left(\pi - 78.54\,\text{s}^{-1}\,t\right)$$

Exercice 1-3 d) (facultatif) Mouvement d'une bielle

Notons x l'abscisse du point B comptée à partir du centre de la deuxième roue.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2\,B} = \overrightarrow{O_2\,B} - \overrightarrow{O_2\,A} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - r_2 \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - r_2 \cos(\alpha_2) \\ -r_2 \sin(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

Notons m la longueur du bras AB. On a la relation

$$(x - r_2 \cos(\alpha_2))^2 + (-r_2 \sin(\alpha_2))^2 = m^2$$

$$(x - r_2 \cos(\alpha_2))^2 = m^2 - (r_2 \sin(\alpha_2))^2$$

Nous admettons que

$$x > r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad x - r_2 \cos(\alpha_2) > 0$$

D'où

$$x - r_2 \cos(\alpha_2) = \sqrt{m^2 - (r_2 \sin(\alpha_2))^2}$$

$$x = r_2 \cos(\alpha_2) + \sqrt{m^2 - (r_2 \sin(\alpha_2))^2}$$

$$x(t) = r_2 \cos(\alpha_2(t)) + \sqrt{m^2 - (r_2 \sin(\alpha_2(t)))^2}$$

$$x(t) = r_2 \cos(\omega_2\, t + \alpha_2(0)) + \sqrt{m^2 - (r_2 \sin(\omega_2\, t + \alpha_2(0)))^2}$$

$$x(t) = r_2 \cos(\omega_2\, t + \alpha_2(0)) + \sqrt{m^2 - (r_2 \sin(\omega_2\, t + \alpha_2(0)))^2}$$

$$x(t) = r_2 \cos(\omega_2\, t + \pi) + \sqrt{m^2 - (r_2 \sin(\omega_2\, t + \pi))^2}$$

Pour l'exemple numérique : $r_2 = 1$, $m = 3$, $\omega_2 = -78.54$, comparons les mouvements

- * mouvement d'une bielle (exact, question d, courbe en trait continu) et
- * harmonique approché de même amplitude (question c, courbe en traitillé) :

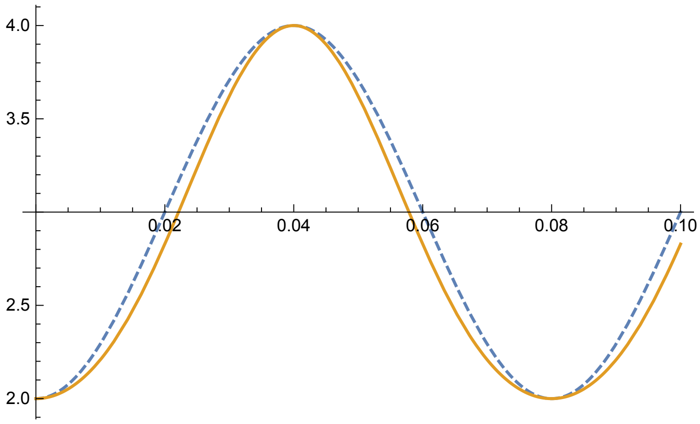
```
Clear[xh, x]
```
efface

```
x[t_] := Cos[-78.54 t + π] + Sqrt[9 - (Sin[-78.54 t + π])^2]
```
cosinus

```
xh[t_] := Cos[-78.54 t + π] + Sqrt[9 - 0]
```
cosinus

```
Plot[{xh[t], x[t]}, {t, 0, 0.1`},
 PlotStyle → {Dashing[{0.01`}], Dashing[{}]}, AxesOrigin → {0, 3}]
```

tracé de courbes | style de tracé | style de rayures | style de rayures | origine des axes



Exercice 1-4

a) D'après le formulaire

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \cos(-\beta) = \cos(\beta)$$

$$\Longrightarrow \quad \sin(\alpha) = \cos\left(-\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Appliquons cette dernière formule à notre problème

$$I(t) = \hat{I}\sin(\omega t - \varphi) = \hat{I}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{où} \qquad \varphi_2 = -\varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$U(t) = \hat{U}\sin(\omega t) = \hat{U}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{où} \qquad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

b) D'après le formulaire

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Appliquons cette dernière formule à notre problème

$$I(t) = \hat{I}\cos(\omega t - \varphi) = \hat{I}\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{où} \qquad \varphi_2 = -\varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$U(t) = \hat{U}\cos(\omega t) = \hat{U}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{où} \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

c) Les deux cas peuvent se ramener à la forme

$$I(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$U(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{où} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$$

Exercice 1-5

$$Z = \omega L = 2\pi\nu L$$

$$\hat{U} = Z\,\hat{I} = 2\pi\nu L\,\hat{I}$$

$$L = \frac{\hat{U}}{2\pi\nu\,\hat{I}} = \frac{325\text{ V}}{2\pi\,50\text{ Hz}\,0.71\text{ A}} \simeq 1.457\text{ H}$$

Exercice 1-6

Première situation

$$\hat{U}_1 = Z_1\,\hat{I}_1 = \omega_1 L\,\hat{I}_1 = 2\pi\nu_1 L\,\hat{I}_1$$

Deuxième situation: même bobine (même inductance *L*)

$$\hat{U}_2 = Z_2\,\hat{I}_2 = \omega_2 L\,\hat{I}_2 = 2\pi\nu_2 L\,\hat{I}_2$$

Comparaison: même tension

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2$$

$$2\pi\nu_1 L\,\hat{I}_1 = 2\pi\nu_2 L\,\hat{I}_2$$

$$\nu_1\,\hat{I}_1 = \nu_2\,\hat{I}_2$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\nu_1\,\hat{I}_1}{\nu_2} \simeq \frac{50\text{ Hz}\,1\text{ A}}{1000\text{ Hz}} \simeq 0.05\text{ A}$$

Exercice 1-7

```
Unprotect[C];
déprotège   constante C
Clear[R, L, C, Z, ω]
efface       constante C
```

$$Z[\omega\_] := \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$$

Ensemble de définition (pour le physicien, dans ce contexte, la pulsation est positive) :

$$D_Z =]\,0;\ \infty\,[$$

Signe: la fonction est positive sur son ensemble de définition

Asymptote verticale

$$\lim_{\omega \downarrow 0} Z(\omega) = \lim_{\omega \downarrow 0} \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2} = \infty$$

Asymptote verticale simple $\omega = 0$.

Asymptote horizontale

$\lim_{\omega \to \infty} Z(\omega) = \infty$ donc pas d'asymptote horizontale.

Asymptote oblique du côté de $+\infty$

$$a = \lim_{\omega\to\infty} \frac{Z(\omega)}{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} \sqrt{\frac{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}{\omega^2}} = \lim_{\omega\to\infty} \sqrt{\frac{R^2}{\omega^2} + \left(L - \frac{1}{C\,\omega^2}\right)^2} = L$$

$$b = \lim_{\omega\to\infty} (Z(\omega) - a\,\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \left(\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2} - L\,\omega\right) =$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\left(\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2} - L\,\omega\right)\left(\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2} + L\,\omega\right)}{\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2} + L\,\omega} =$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2 - L^2\,\omega^2}{\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2} + L\,\omega} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{R^2 - 2\,\frac{L}{C} + \frac{1}{C^2\,\omega^2}}{\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2} + L\,\omega} = 0$$

Asymptote oblique $Z = L\,\omega$

<u>Dérivée</u>

Z'[ω]

$$\frac{\left(L + \frac{1}{C\,\omega^2}\right)\left(-\frac{1}{C\,\omega} + L\,\omega\right)}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{C\,\omega} + L\,\omega\right)^2}}$$

La dérivée a le signe de

$$-\frac{1}{C\,\omega} + L\,\omega = \frac{-1 + L\,C\,\omega^2}{C\,\omega}$$

La dérivée possède un et un seul zéro appelé *pulsation de résonance*

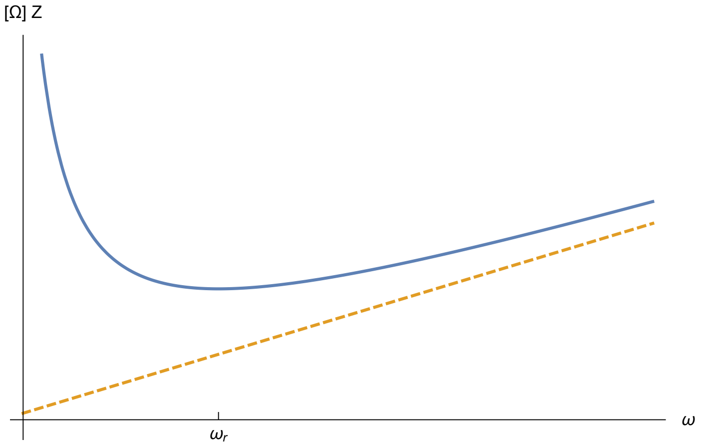
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

Pour $0 < \omega < \omega_r$, la dérivée est négative; la fonction est décroissante sur $]0;\ \omega_r]$.
Pour $\omega_r < \omega$, la dérivée est positive; la fonction est croissante sur $[\omega_r;\ \infty[$.
L'impédance est minimale pour $\omega = \omega_r$.

<u>Graphique</u> (qualitativement)

```
R = 2; L = 1; C = 1; ωr = 1/Sqrt[L C];
                   constante C

Plot[{Z[ω], L ω}, {ω, 0.1`, 3}, PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.01`}]},
tracé de courbes                style de tracé  style de rayures  style de rayures
 Ticks → {{{ωr, "\!\(\*SubscriptBox[\(ω\), \(r\)]\)"}}, None},
 graduations          boîte d'indice                            aucun
 AxesLabel → {"ω", "[Ω] Z"}]
 titre d'axe
```



Exercice 1-8

La fréquence propre est la fréquence pour laquelle $Z = R$:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{L C}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L C}} \simeq \frac{1}{2\pi\sqrt{0.12\,\text{H}\,300\times 10^{-12}\,\text{F}}} \simeq 26.526\,\text{kHz}$$

Exercice 1-9

$$\omega^2 = \frac{1}{L C}$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} \simeq \frac{1}{4\pi^2\left(10\times 10^3\,\text{Hz}\right)^2 50\times 10^{-9}\,\text{F}} \simeq 5\,\text{mH}$$

Exercice 1-10

Impédance à la fréquence de 50 Hz

$$\omega = 2\pi\nu = 100\,\pi\,\text{s}^{-1}$$

$$C = 10^{-6}\,\text{F}$$

$$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^{-4}\,\pi}\,\Omega \simeq 3183.1\,\Omega$$

Intensité du courant

$$\hat{U} = 325\,\text{V}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z} \simeq \frac{325\,\text{V}}{3183.1\,\Omega} \simeq 0.102\,\text{A}$$

Déphasage :

$$\sin(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{Z} = \frac{0 - \frac{1}{\omega C}}{\frac{1}{\omega C}} = -1 \implies \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Impédance pour un courant d'intensité 1.4 A

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \simeq \frac{325\,\text{V}}{1.4\,\text{A}} \simeq 232.14\,\Omega$$

Fréquence correspondante

$$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} \implies \nu = \frac{1}{2\pi Z C} \simeq \frac{1}{2\pi\, 232.14 * 10^{-6}}\,\text{Hz} \approx 685.6\,\text{Hz}$$

Exercice 1-11

Résistance inductive

$$\omega L = 2\pi\nu L = 2\pi\, 50\,\text{Hz}\; 0.005\,\text{H} = 1.5708\,\Omega$$

Résistance capacitive

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\pi\, 50\,\text{Hz}\; 300 \times 10^{-6}\,\text{F}} = 10.6103\,\Omega$$

Impédance

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{(10\,\Omega)^2 + (1.5708\,\Omega - 10.6103\,\Omega)^2} = 13.4801\,\Omega$$

Amplitude du courant

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z} = \frac{325\,\text{V}}{13.4801\,\Omega} = 24.1096\,\text{A}$$

Déphasage

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1.5708\,\Omega - 10.6103\,\Omega}{10\,\Omega} = -0.90395$$

$$\varphi = \arctan(-0.90395) = -0.73499 = -42.11\,°$$

Le décalage temporel, plus précisément le retard du courant sur la tension, est

$$\Delta t = \frac{-\varphi}{\omega} = \frac{+0.73499}{2\pi\, 50\,\text{Hz}} = 2.3396 \times 10^{-3}\,\text{s}$$

Représentation de Fresnel en respectant l'échelle

```
fresnel[10, 0.005, 0.0003, 325., 314.159]
```

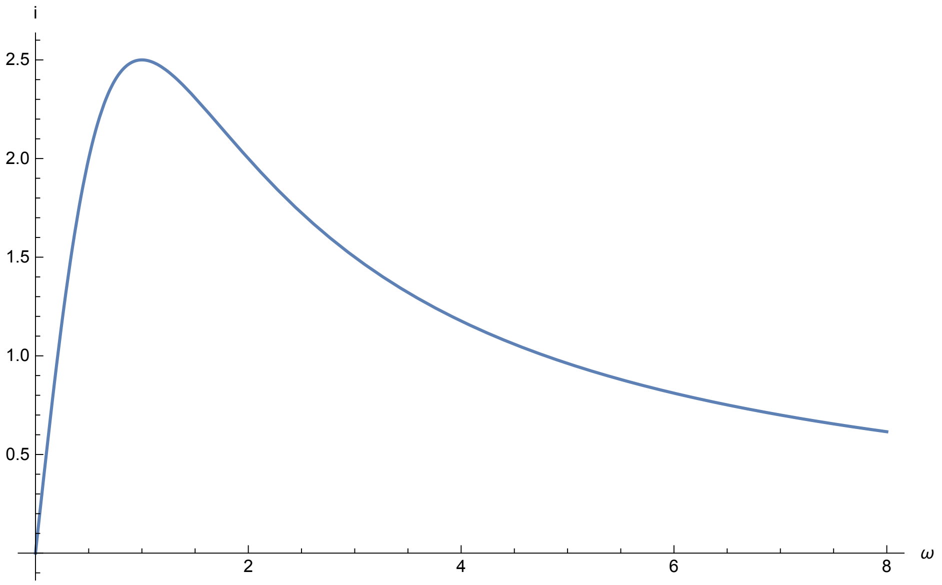
Commentaire : le circuit est capacitif ($\dot{\varphi} < 0$).

Exercice 1-12

$$i[\omega\_] := \frac{5}{\sqrt{r^2 + \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2}}$$

Plot$\left[i[\omega] \,/.\, r \to 2, \left\{\omega, \frac{1}{10^6}, 8\right\},\right.$
tracé de courbes

ImageSize → {500, 300}, AxesLabel → {"ω", "i"}, PlotRange → All]
taille d'image | titre d'axe | zone de tracé | tout



i'[ω]

$$-\frac{5\left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)\left(-\frac{1}{\omega} + \omega\right)}{\left(r^2 + \left(-\frac{1}{\omega} + \omega\right)^2\right)^{3/2}}$$

Solve[i'[ω] == 0, ω]
résous

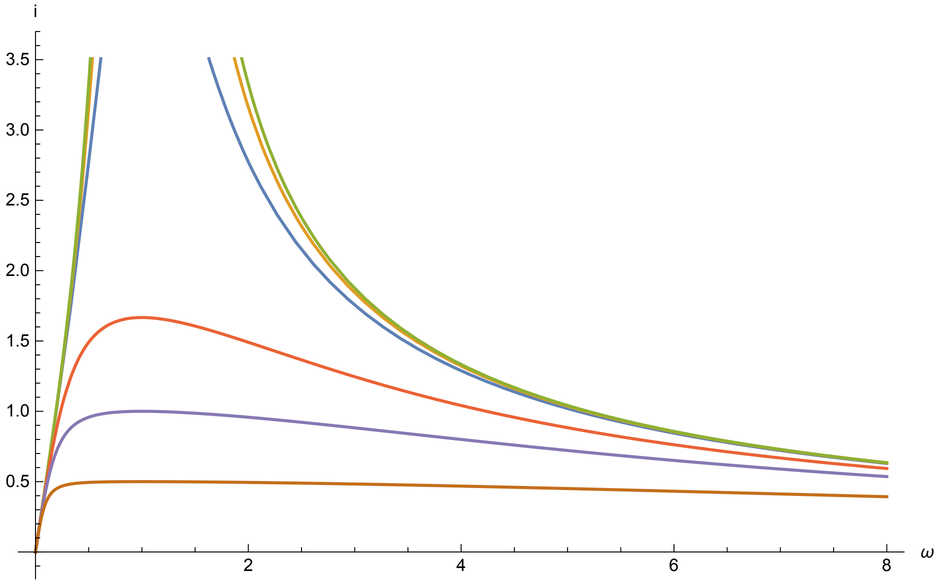
{{ω → -1}, {ω → -i}, {ω → i}, {ω → 1}}

i[1]

$$\frac{5}{\sqrt{r^2}}$$

```
Plot[{i[ω] /.r → 1, i[ω] /.r → 0.5`, i[ω] /.r → 0.1`, i[ω] /.r → 3, i[ω] /.r → 5,
  i[ω] /.r → 10}, {ω, 1/10^6, 8}, ImageSize → {500, 300}, AxesLabel → {"ω", "i"}]
```

tracé de courbes · taille d'image · titre d'axe

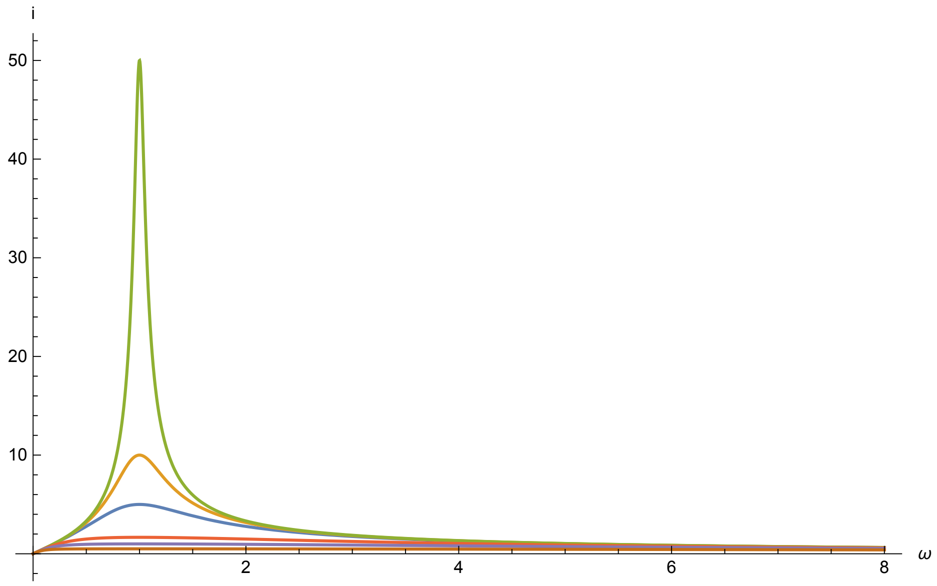


Le maximum est situé au point $(1; \frac{5}{r})$; en particulier

au point $(1; 0.5)$ pour $r = 10$;
au point $(1; 50)$ pour $r = 0.1$;
...

```
Plot[{i[ω] /.r → 1, i[ω] /.r → 0.5`, i[ω] /.r → 0.1`,
  i[ω] /.r → 3, i[ω] /.r → 5, i[ω] /.r → 10}, {ω, 1/10^6, 8},
 ImageSize → {500, 300}, PlotRange → All, AxesLabel → {"ω", "i"}]
```

tracé de courbes · taille d'image · zone de tracé · tout · titre d'axe



Exercice 1-13 et 1-14

Voir le chapitre *Equations différentielles du deuxième ordre.*