Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : cinématique, § 2 et 3
Lien vers les énoncés des exercices :
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/cinematique/2_et_3-cinematique.pdf

Corrigé de l'exercice 2-1

a) Equation cartésienne

$$\text{le point P } (x, y) \text{ appartient à la droite AB}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ les vecteurs } \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ le déterminant des vecteurs } \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \text{ est nul}$$
$$\Longleftrightarrow \det \begin{pmatrix} x-1 & 4 \\ y-3 & -5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)(-5) - (y-3)\,4 = 0$$
$$\Longleftrightarrow -5x - 4y + 17 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 5x + 4y - 17 = 0$$

b) Système d'équations paramétriques

$$\text{le point P appartient à la droite AB}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ les vecteurs } \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ le vecteur } \overrightarrow{AP} \text{ est un multiple du vecteur } \overrightarrow{AB}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \text{où} \qquad k \text{ est un nombre réel appelé paramètre}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 3 - 5k \end{cases}$$

Interprétation géométrique:

k indique par combien il faut multiplier le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour obtenir le vecteur $\overrightarrow{AP}$.

c) Autre système d'équations paramétriques

On peut choisir librement l'équation paramétrique d'une composante (n'importe quelle fonction affine non constante $x = m\,t + p$, $\quad m \neq 0$) puis calculer l'équation paramétrique de l'autre composante au moyen de l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$x = 4t$$
$$y = \frac{-5x + 17}{4} = \frac{-5\,(4t) + 17}{4} = -5t + \frac{17}{4}$$

d) Méthode cinématique : nous interprétons le paramètre k comme désignant le temps et le système d'équations paramétriques comme décrivant l'horaire d'un mouvement rectiligne uniforme:

à l'instant k=2, le mobile a la position $\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

à l'instant k=7, le mobile a la position $\vec{r}(7) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Déplacement} \qquad \Delta\vec{r} = \vec{r}(7) - \vec{r}(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\text{Durée} \qquad \Delta k = 7 - 2 = 5$$
$$\text{Vitesse} \qquad \vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta k} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Horaire $\boxed{\vec{r}(k) = \vec{v}(k - k_0) + \vec{r}(k_0)}$

$$= \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1 \end{pmatrix} (k - 2) + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8\,k + 6.6 \\ k - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2-2

a) Sytème d'équations paramétriques

le point P appartient à la droite AB

$\Longleftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Longleftrightarrow$ le vecteur $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \\ z + 2 \end{pmatrix}$ est un multiple du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ où k est un nombre réel appelé paramètre

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \\ z + 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + 4\,k \\ y = 3 - 5\,k \\ z = -2 + 3\,k \end{array}} \right.$$

b) Méthode cinématique : nous interprétons le paramètre k comme désignant le temps et le système d'équations paramétriques comme décrivant l'horaire d'un mouvement rectiligne uniforme :

à l'instant k=5, le mobile a la position $\vec{r}(5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

à l'instant k=12, le mobile a la position $\vec{r}(12) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déplacement $\triangle\vec{r} = \vec{r}(12) - \vec{r}(5) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Durée $\triangle k = 12 - 5 = 7$

Vitesse $\vec{v} = \dfrac{\triangle\vec{r}}{\triangle k} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Horaire $\boxed{\vec{r}(k) = \vec{v}(k - k_0) + \vec{r}(k_0)}$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} (k - 5) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

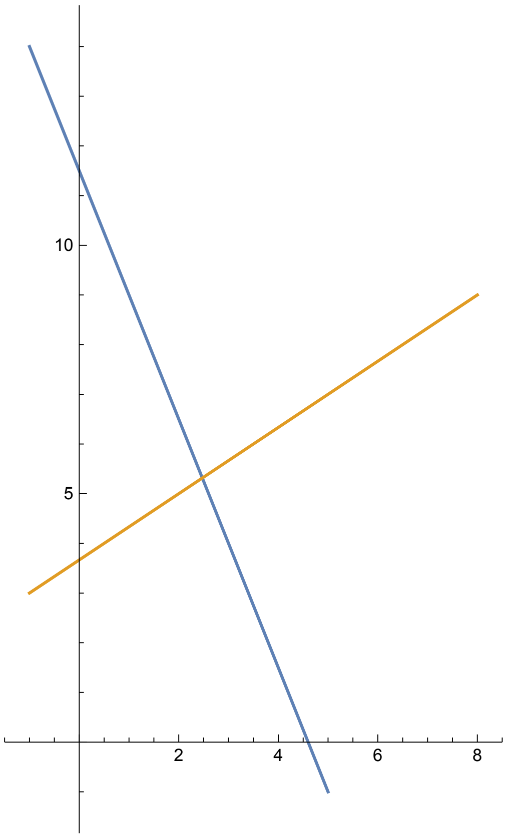
$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{7}\,k - \frac{13}{7} \\ -\frac{5}{7}\,k + \frac{46}{7} \\ \frac{3}{7}\,k - \frac{29}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2-3

$$y_1 = \frac{-3\,x_1 + 5}{2} = 3\,k + \frac{5}{2}$$
$$x_2 = \frac{-2\,y_2 + 5}{3} = -2\,t + \frac{5}{9}$$

Corrigé de l'exercice 2-4

```
ParametricPlot[{{3 + 2 t, 4 - 5 t}, {5 + 3 t, 7 + 2 t}}, {t, -2, 1}, AspectRatio → Automatic]
```
représentation graphique de courbes paramétrées — rapport d'aspect — automatique




```
Eliminate[{x == 3 + 2 k, y == 4 - 5 k}, k]
```
élimine

$23 - 2\,y == 5\,x$

```
Eliminate[{x == 5 + 3 t, y == 7 + 2 t}, t]
```
élimine

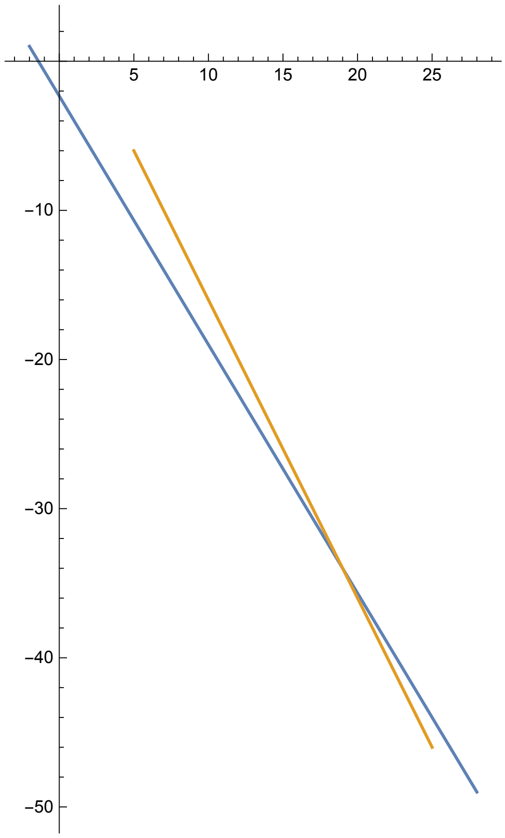
$-11 + 3\,y == 2\,x$

```
Reduce[3 + 2 k == 5 + 3 t ∧ 4 - 5 k == 7 + 2 t, {k, t}]
```
réduis

$k == -\frac{5}{19}\ \&\&\ t == -\frac{16}{19}$

Corrigé de l'exercice 2-5

```
ParametricPlot[{{-2 + 3 t, 1 - 5 t}, {5 + 2 t, -6 - 4 t}}, {t, 0, 10}, AspectRatio → Automatic]
```
représentation graphique de courbes paramétrées | rapport d'aspect | automatique



$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \simeq 5.831$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \simeq 4.472$$

```
Reduce[x == -2 + 3 t1 ∧ y == 1 - 5 t1 ∧ x == 5 + 2 t2 ∧ y == -6 - 4 t2, {x, y, t1, t2}]
```
réduis

```
x == 19 && y == -34 && t1 == 7 && t2 == 7
```

Oui, les deux mobiles se rencontrent au point (19, -34) à l'instant t=7.

Corrigé de l'exercice 2-7

Enclenchons le chronomètre à l'instant où le premier mobile passe au point (6; -2). L'horaire du premier est

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$$

Les deux mobiles se rencontrent à l'instant t=4, c'est-à-dire au point

$$\vec{r}_1(4) = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} 4 + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$$

La vitesse du deuxième mobile est donc

$$\vec{v}_2 = \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}}{4-0} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$

L'horaire du deuxième mobile est donc

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2-8

Déterminons d'abord l'équation cartésienne de la trajectoire du premier mobile

```
Eliminate[{x == t, y == 1 + 2 t}, t]
élimine
```

$-1 + y == 2x$

Calculons ensuite le point de rencontre, c'est-à-dire l'intersection des deux trajectoires

```
Reduce[2 x - y + 1 == 0 ∧ 3 x - y - 2 == 0, {x, y}]
réduis
```

x == 3 && y == 7

L'heure de la rencontre est égale à l'heure du passage du premier au point d'intersection

```
Reduce[3 == t ∧ 7 == 1 + 2 t, t]
réduis
```

t == 3

La vitesse du deuxième mobile est donc

$$\vec{v}_2 = \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}}{3-0} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

L'horaire du deuxième mobile est donc

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2-9

```
Reduce[x == -2 + 3 t1 ∧ y == 1 - 5 t1 ∧ z == 2 t1 ∧
réduis
  x == 5 + 2 t2 ∧ y == -6 - 4 t2 ∧ z == 5, {x, y, z, t1, t2}]
False
```

L'ensemble des solutions est vide donc les deux trajectoires ne se coupent pas.
Par ailleurs, les deux trajectoires ne sont pas parallèles donc les deux trajectoires sont **gauches**.

Corrigé de l'exercice 2-10

```
Reduce[x == -8 + 3 t1 ∧ y == 11 - 5 t1 ∧ z == t1 - 6 ∧
réduis
  x == 1 + 2 t2 ∧ y == 2 - 4 t2 ∧ z == 12 - t2, {x, y, z, t1, t2}]
x == 19 && y == -34 && z == 3 && t1 == 9 && t2 == 9
```

Les deux mobiles se rencontrent au point (19 m; -34 m; 3 m) à l'heure t = 9.

Corrigé de l'exercice 2-11

```
Reduce[ x == -2 + 3 t1 ∧ y == 1 - 5 t1 ∧ z == t1 - 4 ∧
réduis
  x == 1 + 2 t2 ∧ y == 2 - 4 t2 ∧ z == 12 - t2, {x, y, z, t1, t2}]
x == 19 && y == -34 && z == 3 && t1 == 7 && t2 == 9
```

Les deux trajectoires se coupent au point (19 m; -34 m; 3 m).
Les deux mobiles ne se rencontrent pas car les heures de passage
au point d'intersection sont différentes.

Corrigé de l'exercice 2-12

Vitesse du premier mobile

$$\vec{v}_1 = \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{11 - 5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Horaire du premier

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} (t - 5) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lieu de la rencontre

$$\vec{r}_1(7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} (7 - 5) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

La vitesse du deuxième mobile est donc

$$\vec{v}_2 = \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}}{7 - 3} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{12} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{31}{12} \end{pmatrix}$$

L'horaire du deuxième mobile est donc

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{25}{12} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{31}{12} \end{pmatrix} (t - 3) + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2-13

Si la dérivée d'une fonction est une constante non nulle

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

il s'ensuit que la fonction est un polynôme de degré 1 dont les coefficients x_1, x_0, y_0, y_1, z_1, z_0 sont cherchés

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1\, t + x_0 \\ y_1\, t + y_0 \\ z_1\, t + z_0 \end{pmatrix}$$

Comparons avec la donnée

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

L'horaire prend maintenant la forme

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\, t + x_0 \\ 3\, t + y_0 \\ -5\, t + z_0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients x_0, y_0, z_0 doivent vérifier

$$\vec{r}(9) = \begin{pmatrix} 2 * 9 + x_0 \\ 3 * 9 + y_0 \\ -5 * 9 + z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -31 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Finalement, l'horaire est

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\, t - 19 \\ 3\, t - 31 \\ -5\, t + 65 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2-14

La méthode consiste à décrire d'abord la droite par un système paramétrique puis à convertir le système paramétrique en un système cartésien.

le point P appartient à la droite AB

$\Longleftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Longleftrightarrow$ le vecteur $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix}$ est un multiple du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ où k est un nombre réel appelé paramètre

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - 6\,k \\ y = -2 + 5\,k \\ z = 3 - 7\,k \end{array} \right.$$

```
Eliminate[{x == 5 - 6 k, y == -2 + 5 k, z == 3 - 7 k}, k]
```

élimine

$5\,x == 13 - 6\,y\ \&\&\ 7\,y == 1 - 5\,z$

Corrigés des exercices facultatifs

Corrigé de l'exercice 2-6 (facultatif)

Déplacement $\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} 40 - 100 \\ 60 - (-120) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 180 \end{pmatrix}$

Durée $\Delta t = 20 - 10 = 10$

Vitesse $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$

Horaire $\vec{r}(t) = \vec{v}(t - t_0) + \vec{r}(t_0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}(t - 10) + \begin{pmatrix} 100 \\ -120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6t + 160 \\ 18t - 300 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 2-15 (facultatif)

L'horaire du mobile est de la forme

$$\vec{r}\,(t) = \vec{v}\,(t-8) + \vec{r}\,(8) = \vec{v}\,(t-8) + \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

<u>Calcul des vitesses possibles, première méthode</u>

Il s'agit de déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}$. La *direction* du vecteur vitesse est donnée par un vecteur directeur de la trajectoire $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. La *norme* du vecteur vitesse est égale à 4.

$$\left(\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = |\lambda|\sqrt{13} \quad \text{et} \quad v = 4\right)$$

$$\Longrightarrow \quad |\lambda|\sqrt{13} = 4 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$$

Les vitesses possibles sont donc

$$\vec{v}_1 = \frac{4}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \frac{-4}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

<u>Calcul des vitesses possibles, deuxième méthode</u>

D'une part,

$$\left(\vec{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \lambda\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_x}{2} = \frac{v_y}{3}$$

D'autre part

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{et} \quad v = 4$$

$$\Longrightarrow \quad v_x^2 + v_y^2 = 16$$

Ensemble, ces deux conditions constituent le système d'équations

$$\begin{cases} v_y = \frac{3}{2}\,v_x \\ v_x^2 + v_y^2 = 16 \end{cases}$$

dont les solutions sont

$$\vec{v}_1 \simeq \begin{pmatrix}2.2188\\3.3282\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 \simeq \begin{pmatrix}-2.2188\\-3.3282\end{pmatrix}$$

<u>Horaires</u>

Les deux horaires possibles sont

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_1\,(t) &= \vec{v}_1\,(t-8) + \vec{r}_1\,(8) = \frac{4\,(t-8)}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} \\ \vec{r}_2\,(t) &= \vec{v}_2\,(t-8) + \vec{r}_2\,(8) = \frac{-4\,(t-8)}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Corrigé de l'exercice 3-1 a)

Si un mouvement est décrit par une seule composante scalaire, il faut comprendre que les autres composantes sont constantes

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

La trajectoire de ce mouvement est une droite: il s'agit d'une droite verticale, parallèle à l'axe des z. Le mouvement est donc rectiligne.

Puisque le graphique dessiné n'est pas une droite, les déplacements Δz ne sont pas proportionnels aux durées Δt, donc la vitesse $v_z(t)$ n'est pas constante.
L'horaire décrit une chute libre avec vitesse initiale nulle.

Exercice 3-1 b)

1° Vitesse linéaire = norme de la vitesse

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{0 + 0 + (g\,t)^2} = |g\,t|$$

La vitesse linéaire augmente sur [0; ∞[. Elle diminue sur]−∞; 0].

2° Composante scalaire verticale de la vitesse

$$v_z(t) = -g\,t$$

La composante scalaire verticale de la vitesse diminue sur]−∞; ∞[.

3° La composante scalaire verticale de l'accélération

$$a_z = -g$$

La composante scalaire verticale de l'accélération est (négative et) constante.

4° La distance à l'origine est

$$OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \left(-\frac{1}{2} g\,t^2\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \frac{g^2 t^4}{4}}$$

Dans le cas où le mobile passe par l'origine, on a $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

$$OP = \sqrt{\frac{g^2 t^4}{4}} = \frac{1}{2} g\,t^2 = |z(t)|$$

La distance à l'origine augmente sur [0; ∞[. Elle diminue sur]−∞; 0].

5° Les coordonnées (x, y, z) d'un point s'appellent x=abscisse, y=ordonnée et z=cote.
La cote du mobile est sa troisième coordonnée; elle représente son altitude

$$z(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2$$

La cote du mobile diminue sur [0; ∞[. Elle augmente sur]−∞; 0].

Corrigé de l'exercice 3-2

Orientons l'axe vertical vers le haut et fixons son origine au pied de la tour, au niveau du sol. L'horaire de l'objet est alors

$$a_z = -g = -9.81\ \frac{m}{s^2}$$

$$(v_0)_z = +3\ \frac{m}{s}$$

$$z_0 = 30\ m$$

$$z\ (t) = z_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a_z\, t^2 = z_0 + v_0\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$v_z\ (t) = (v_0)_z - g\, t$$

Dans cet exercice, l'horaire est soumis à la condition

$$t \geq 0$$

Remarque : dans les calculs par ordinateur, on n'écrit pas les unités mais, pour interpréter les résultats, on se rappellera que les positions sont exprimées en mètres et les temps en secondes.

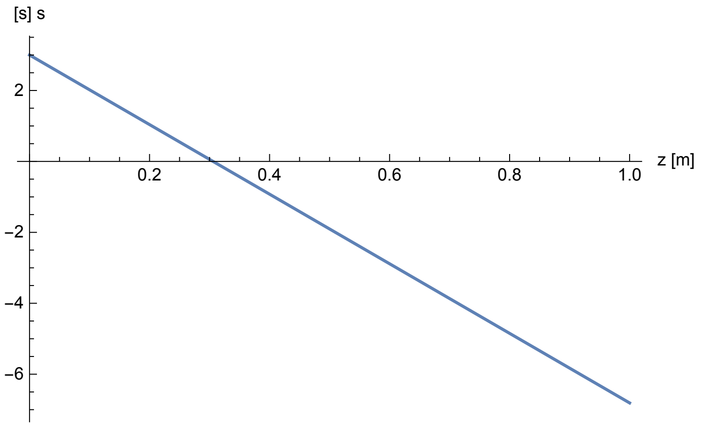
```
Clear[z, t];
```
efface

$$z[t\_] := 30 + 3\, t - \frac{1}{2}\, (9.81)\, t^2$$

```
vz = z′;
vz[t]
```

3 - 9.81 t

```
Plot[vz[t], {t, 0, 1}, AxesLabel → {"z [m]", "[s] s"}]
```
tracé de courbes   titre d'axe



a) Heure de passage au point culminant (sommet) en secondes

```
Reduce[vz[t] == 0, t]
```
réduis

t == 0.30581

```
ts = Reduce[vz[t] == 0, t][[2]]
```
réduis

0.30581

Altitude du point culminant (au dessus du sol) en mètres

```
z[ts]
```

```
30.4587
```

b) Heure d'arrivée au sol (heure finale) en secondes

```
Reduce[z[t] == 0 , t]
réduis
```

```
t == -2.18612 || t == 2.79774
```

```
Reduce[z[t] == 0 ∧ t > 0, t]
réduis
```

```
t == 2.79774
```

```
tf = Reduce[z[t] == 0 ∧ t > 0, t][[2]]
        réduis
```

```
2.79774
```

Vitesse à l'arrivée au sol (composante scalaire verticale) en $\frac{m}{s}$

```
vz[tf]
```

```
-24.4459
```

Norme de la vitesse à l'arrivée au sol = 24.4459 $\frac{m}{s} \simeq 88 \frac{\text{km}}{h}$.

c) Heure de passage à l'altitude 15 m, en secondes

```
Reduce[z[t] == 15 , t]
réduis
```

```
t == -1.46947 || t == 2.08109
```

```
Reduce[z[t] == 15 ∧t > 0, t]
réduis
```

```
t == 2.08109
```

```
t15 = Reduce[z[t] == 15 ∧ t > 0, t][[2]]
        réduis
```

```
2.08109
```

Vitesse moyenne sur les 15 derniers mètres (composante scalaire verticale), en $\frac{m}{s}$

$$\bar{v}_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{(0\,\text{m}) - (15\,\text{m})}{t_f - t_{15}}$$

$$\frac{-15}{tf - t15}$$

```
-20.9307
```

Exercice 3-3 a)

$$v = \frac{60\ \text{km}}{h} = \frac{60\,000\ m}{3600\ s} = 16.667\ \frac{m}{s}$$

```
v = 16.667;
```

Soient $x = 0$ et $t = 0$ le lieu et l'instant où le conducteur aperçoit l'obstacle. Durant l'intervalle de temps [0; 1 s], sa vitesse est $v =$ constante. A l'instant $t_1 = 1\ s$, il se trouve donc à la position

$$x_1 = v\, t_1 = v \cdot 1\ s = 16.667\ \text{m} = \text{distance de réaction}$$

Il commence à freiner à l'instant $t_1 = 1\ s$. Durant l'intervalle de temps [t_1; t_f], son mouvement est uniformément accéléré

```
t1 = 1;
```

$$a_x = -a = -5.2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$(v_1)_x = v$$

$$t_1 = 1\ \text{s}, \qquad x_1 = v\, t_1$$

$$x(t) = x_1 + (v_1)_x (t - t_1) - \frac{1}{2} a (t - t_1)^2$$

$$= v \cdot t_1 + v (t - t_1) - \frac{1}{2} a (t - t_1)^2 = v\, t - \frac{1}{2} a (t - t_1)^2$$

$$v_x(t) = v - a (t - t_1)$$

```
a = 5.2 ; x[t_] := v t - 1/2 a (t - t1)^2;
vx = x′; vx[t]
```

$16.667 - 5.2 (-1 + t)$

L'horaire précédent est soumis à la condition

$$t \geq 1\ \text{s}$$

Heure de l'arrêt (=temps de réaction + durée du freinage) ou heure finale

```
Reduce[vx[t] == 0, t]
```

réduis

t == 4.20519

```
tf = Reduce[vx[t] == 0, t][[2]]
```

réduis

4.20519

Distance d'arrêt = position finale

```
x[tf]
```

43.3775

Exercice 3-3 b)

$$v = \frac{60\ \text{km}}{h} = \frac{120\,000\ m}{3600\ s} = 33.333\ \frac{m}{s}$$

```
v = 33.333;
```

Soient $x = 0$ et $t = 0$ le lieu et l'instant où le conducteur aperçoit l'obstacle. Durant l'intervalle de temps [0; 1 s], sa vitesse est $v =$ constante. A l'instant $t_1 = 1\ s$, il se trouve donc à la position

```
t1 = 1;
```

$$x_1 = v\, t_1 = v\ \cdot 1\ s = 33.333\ \text{m} = \text{distance de réaction}$$

Il commence à freiner à l'instant $t_1 = 1\ s$. Durant l'intervalle de temps [t_1; t_f], son mouvement est uniformément accéléré

$$a_x = -a = -5.2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$(v_1)_x = v$$

$$t_1 = 1\ \text{s}, \qquad x_1 = v\, t_1$$

$$x(t) = x_1 + (v_1)_x (t - t_1) - \frac{1}{2} a (t - t_1)^2$$

$$= v\ \cdot t_1 + v (t - t_1) - \frac{1}{2} a (t - t_1)^2 = v\, t - \frac{1}{2} a (t - t_1)^2$$

$$v_x(t) = v - a (t - t_1)$$

```
a = 5.2 ; x[t_] := v t - 1/2 a (t - t1)^2;
vx = x′; vx[t]
```

33.333 - 5.2 (-1 + t)

L'horaire précédent est soumis à la condition

$$t \geq 1\ \text{s}$$

Heure de l'arrêt (=temps de réaction + durée du freinage) ou heure finale

```
Reduce[vx[t] == 0, t]
```

réduis

t == 7.41019

```
tf = Reduce[vx[t] == 0, t][[2]]
```

réduis

7.41019

Distance d'arrêt = position finale

```
x[tf]
```

140.168

Corrigé de l'exercice 3-4

Enclenchons le chronomètre à l'instant du début du freinage : $x(0) = 0$

$$v_x(t) = v_0 - a\,t = 6 - a\,t$$
$$x(t) = v_0\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 6\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

A l'instant de l'arrêt, on a

$$v_x(t) = 0$$
$$x(t) = 15$$

Résolvons le système de 2 équations à deux inconnues

$$6 - a\,t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a\,t = 6$$
$$6\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad t\left(6 - \frac{1}{2}\,(a\,t)\right) = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad t\left(6 - \frac{1}{2}\,6\right) = 15$$

On obtient

$$t = \frac{15}{3} = 5 \qquad \text{et}$$

norme de l' accélération $\boxed{a = \frac{6}{t} = 1.2 \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]}$

composante scalaire de l' accélération $\boxed{a_x = -a = -1.2}$

Horaire:

$$\boxed{\begin{array}{ll} v_x(t) = 6 - 1.2\,t & \\ x(t) = 6\,t - 0.6\,t^2 & \\ \text{condition} & 0 \le t \le 5 \end{array}}$$

tb = Heure du passage à la mi-parcours en *s*

```
Reduce[6 t - 0.6 t^2 == 7.5 ∧ 0 ≤ t ≤ 5, t]
```
réduis

```
t == 1.46447
```

```
tb = Reduce[6 t - 0.6 t^2 == 7.5 ∧ 0 ≤ t ≤ 5, t][[2]]
```
réduis

```
1.46447
```

Vitesse à mi-parcours en $\frac{m}{s}$

```
6 - 1.2 tb
```

```
4.24264
```

tc = heure à laquelle sa vitesse est de 3 $\frac{m}{s}$, en secondes

```
Reduce[6 - 1.2 t == 3 ∧ 0 ≤ t ≤ 5, t]
```
réduis

```
t == 2.5
```

```
tc = Reduce[6 - 1.2 t == 3 ∧ 0 ≤ t ≤ 5, t][[2]]
```
réduis

```
2.5
```

Position à cet instant, en mètres

6 tc - 0.6 tc²

11.25

Corrigé de l'exercice 3-5

Position initiale (altitude 0.75 m)

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.75\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Vitesse initiale (horizontale)

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} V_{char} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où V_{char} désigne la vitesse du chariot à l' instant où il quitte la table

Horaire

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{char} \\ 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} V_{char}\, t \\ z_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{pmatrix}$$

Heure à laquelle le chariot atteint le sol

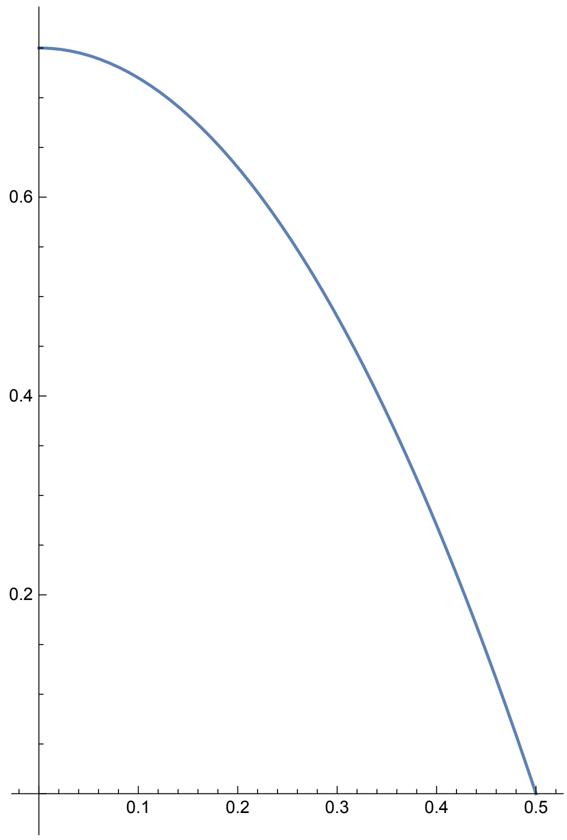
$$z_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2\, z_0}{g}} \approx \sqrt{\frac{2 * 0.75\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \approx 0.391031\,\mathrm{s}$$

Vitesse du chariot à l'instant où il quitte la table (d = distance horizontale = 0.5 m)

$$V_{char}\, t = d \qquad \Longleftrightarrow$$

$$V_{char} = \frac{d}{t} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2\, z_0}{g}}} = d\sqrt{\frac{g}{2\, z_0}} \approx \frac{0.5\,\mathrm{m}}{0.391031\,\mathrm{s}} = 1.27867\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

```
ParametricPlot[{1.27867` t, 0.75` - 9.81` t^2/2}, {t, 0, 0.391031`}, AspectRatio → Automatic]
```
représentation graphique de courbes paramétrées · rapport d'aspect · automatique



$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} V_{char} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} V_{char} \\ -g\,t \end{pmatrix}$$

Vitesse à laquelle le chariot atteint le sol

$$\vec{v}(0.391031\ \mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 1.27867\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ -9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} * 0.391031\ \mathrm{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.27867 \\ -3.83601 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

norme $\quad v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \approx 4.0435\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Angle avec la verticale

$$\tan(\varphi) = \frac{|v_x|}{|v_z|} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \approx \mathrm{Arctan}\left(\frac{1.27867}{3.83601}\right) \approx 0.32175\ \mathrm{rad} \approx 18.435\ °$$

Vitesse du chariot pour qu'il tombe à 1 *m* de la table

$$\boxed{V_{char} = d\sqrt{\frac{g}{2\,z_0}}} \approx 1\ \mathrm{m}\sqrt{\frac{9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 * 0.75\ \mathrm{m}}} \approx 2.5573\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Exercice 3-6

Horaires des deux mobiles (${z_0}$ désigne la hauteur de la chute; on suppose $z_0 > 0$)

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} x_0 + u\, t \\ z_0 - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{pmatrix}$$

La durée *t* de la chute est la même pour les deux mobiles

$$\left(z_0 - \frac{1}{2} g\, t^2 = 0 \quad \text{et}\; t \geq 0\right) \implies \boxed{t_f = \sqrt{\frac{2 z_0}{g}}}$$

Les vecteurs vitesses sont

$$\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 0 \\ -g\, t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} u \\ -g\, t \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne les normes des vitesses, celle du premier objet est inférieure à celle du deuxième:

$$v_1(t) = |g\, t|$$

$$v_2(t) = \sqrt{u^2 + g^2 t^2}$$

pour tout temps t, on a $v_1(t) < v_2(t)$

A l'instant où ils atteignent le sol

$$v_1(t_f) = g \sqrt{\frac{2 z_0}{g}} = \sqrt{2 g z_0}$$

$$v_2(t_f) = \sqrt{u^2 + g^2 \frac{2 z_0}{g}} = \sqrt{u^2 + 2 g z_0}$$

Exercice 3-7

La formule de la portée ne se trouvant pas dans le formulaire, établir la formule fait partie intégrante de l'exercice.

Position initiale : le point de départ est l'origine

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vitesse initiale en fonction de la norme de la vitesse et l'angle d'élévation α

$$\vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Horaire

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha)\, t \\ v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{pmatrix}$$

Heure à laquelle le projectile atteint le sol (altitude $z(t) = 0$)

$$v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \left(v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g\, t \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = 0 = \text{heure du départ} \text{ ou } t_f = \frac{2\, v_0 \sin(\alpha)}{g} = \text{heure de l'arrivée}$$

Notons d = portée (distance horizontale) = lieu où le projectile atteint le sol

$$d = x(t_f) = v_0 \cos(\alpha) \frac{2\, v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\, 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g}$$

La relation trigonométrique suivante (voir formulaire) permet de simplifier la formule de la portée

$$2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

La formule de la portée s'écrit alors

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Dans notre problème, l'inconnue est α. L'équation s'écrit alors

$$\boxed{\sin(2\alpha) = \frac{d\, g}{v_0^2}}$$

$$\mathbf{v0 = 50;\ d = 240;\ g = 9.81;\ u = \frac{d\, g}{v0^2}}$$

0.94176

$$\sin(2\alpha) = u \quad \Longleftrightarrow \quad (2\alpha = \text{Arcsin}(u) + k\, 2\pi \text{ ou } 2\alpha = \pi - \text{Arcsin}(u) + k\, 2\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\alpha = \frac{\text{Arcsin}(u)}{2} + k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{\pi - \text{Arcsin}(u)}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right)$$

Dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, cette équation possède deux solutions complémentaires

$$\alpha_1 = \frac{\text{Arcsin}[u]}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi - \text{Arcsin}(u)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{ArcSin}[u]}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

Réponses numériques en radians

$\{\alpha1, \alpha2\} = \left\{\frac{\text{ArcSin}[u]}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\text{ArcSin}[u]}{2}\right\}$

{0.613913, 0.956883}

Réponses numériques en degrés

$\{\alpha1, \alpha2\} \frac{180}{\pi}$

{35.1746, 54.8254}

Réponses littérales : α_1 =angle d'élévation en tir tendu et α_2 =angle d'élévation en tir courbe

$$\boxed{\begin{array}{c}\alpha_1 = \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\left(\frac{d\,g}{v_0^2}\right)\\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1\end{array}}$$

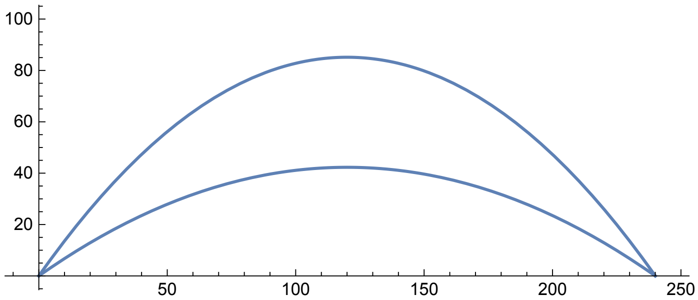
$\text{tf1} = \frac{2\,\text{v0}\,\text{Sin}[\alpha1]}{g}; \text{tf2} = \frac{2\,\text{v0}\,\text{Sin}[\alpha2]}{g};$

$\text{Show}\left[\text{ParametricPlot}\left[\left\{\text{v0}\,\text{Cos}[\alpha1]\,t, \text{v0}\,\text{Sin}[\alpha1]\,t - \frac{g\,t^2}{2}\right\},\right.\right.$
mon··· représentation graphiqu··· cosinus sinus

$\{t, 0, \text{tf1}\}, \text{DisplayFunction} \to \text{Identity}], \text{ParametricPlot}[$
fonction d'affichage identité représentation graphique de courbes paramétrées

$\left\{\text{v0}\,\text{Cos}[\alpha2]\,t, \text{v0}\,\text{Sin}[\alpha2]\,t - \frac{g\,t^2}{2}\right\}, \{t, 0, \text{tf2}\}, \text{DisplayFunction} \to \text{Identity}],$
cosinus sinus fonction d'affichage identité

$\text{AspectRatio} \to \text{Automatic}, \text{DisplayFunction} \to \text{\$DisplayFunction}, \text{PlotRange} \to \{0, 100\}]$
rapport d'aspect automatique fonction d'affichage fonction d'affichage pa··· zone de tracé



Exercice 3-8 a)

Abscisse de la mi-parcours

$$x_m = \frac{x(0) + x(2\,s)}{2} = \frac{0\,m + 8\,m}{2} = 4\,m$$

Heure de passage du mobile à mi-parcours

$$x(t) = 4\,m \iff t = \sqrt[3]{4}\ s$$

Vitesse instantanée

$$v_x(t) = 3\,t^2$$

Vitesse à mi-parcours

$$v_x(t) = 3\left(\sqrt[3]{4}\ s\right)^2 = 3 \times 4^{\frac{2}{3}} \qquad \left[\frac{m}{s}\right]$$

N[3 × 4^(2/3)]

valeur numérique

7.55953

Exercice 3-8 b)

Pour un mouvement uniformément accéléré, la vitesse à la mi-parcours diffère généralement de la vitesse à la mi-temps. Nous allons l'illustrer par un exemple. Soit l'horaire sur [0; 2 s]

$$z(t) = -5\,t^2$$

Cote de la mi-parcours

$$\frac{z[0] + z[2\,s]}{2} = \frac{0 + (-20\,m)}{2} = -10\,m$$

Heure de passage à la mi-parcours

$$z(t) = -10 \iff -5\,t^2 = -10 \iff t^2 = 2 \iff t = \sqrt{2}$$

Vitesse instantanée

$$v_z(t) = -10\,t$$

Vitesse à la mi-parcours

$$v_z\left(\sqrt{2}\ s\right) = -10\sqrt{2}\ \frac{m}{s} \simeq -14.14\ \frac{m}{s}$$

Vitesse à la mi-temps

$$v_z(1\,s) = -10\ \frac{m}{s}$$

Les deux vitesses diffèrent.

Exercice 3-9

$$a_x = -0.5$$

est une constante non nulle, c'est-à-dire un polynôme de degré 0. Il s'ensuit que la vitesse est un polynôme de degré 1 en t

$$v_x(t) = v_1\, t + v_0$$

où les coefficients v_1 et v_0 sont cherchés. Comparons la dérivée de la vitesse et l' accélération donnée

$$\dot{v}_x(t) = a_x \quad \Longrightarrow \quad v_1 = -0.5 \quad \Longrightarrow \quad v_x(t) = -0.5\, t + v_0$$

Comparons la vitesse en $t = 5$ et la vitesse donnée 12

$$v_x(5) = 12 \quad \Longrightarrow \quad -0.5 * 5 + v_0 = 12$$
$$\Longrightarrow \quad v_0 = 14.5 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_x(t) = -0.5\, t + 14.5}$$

La vitesse est un polynôme de degré 1. Il s'ensuit que l'horaire est un polynôme de degré 2 en t

$$x(t) = x_2\, t^2 + x_1\, t + x_0$$

où les coefficients x_2, x_1, x_0 sont cherchés. Comparons la dérivée de l'horaire avec la vitesse

$$\dot{x}(t) = v_x(t)$$
$$\Longrightarrow \quad 2\, x_2\, t + x_1 = -0.5\, t + 14.5 \qquad \text{pour tous les } t$$
$$\Longrightarrow \quad 2\, x_2 = -0.5 \quad \text{et} \quad x_1 = 14.5$$
$$\Longrightarrow \quad x_2 = -0.25 \quad \text{et} \quad x_1 = 14.5$$
$$\Longrightarrow \quad x(t) = -0.25\, t^2 + 14.5\, t + x_0$$

Comparons la position à l'instant $t = 5$ et la position -50 donnée

$$x(5) = -50 \quad \Longrightarrow \quad -0.25 * 5^2 + 14.5 * 5 + x_0 = -50 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -116.25$$
$$\Longrightarrow \quad \boxed{x(t) = -0.25\, t^2 + 14.5\, t - 116.25}$$