Marcel Délèze
Edition 2017

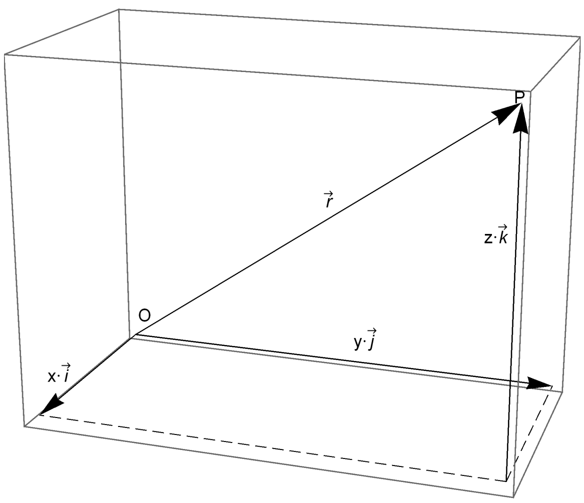
Thème : cinématique § 1
Lien vers les énoncés des exercices :
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/cinematique/1-cinematique.pdf

Corrigé de l'exercice 1-1

Un vecteur est une grandeur, représentée par une *flèche*, qui a *une direction, un sens et une longueur*.

Par rapport à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il s'écrit au moyen de trois composantes

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Une composante scalaire d'un vecteur, par exemple x, est un *nombre réel, positif ou négatif*, qui apparaît comme composante d'un vecteur.

Une composante vectorielle d'un vecteur, par exemple

$$x\,\vec{i} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est un *vecteur* qui est *parallèle à un axe* de la base. Un vecteur est égal à la somme de ses composantes vectorielles :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

La norme d'un vecteur est un *nombre réel ≥ 0* qui représente la *longueur* du vecteur.

Corrigé de l'exercice 1-2

a) La vitesse moyenne sur l'intervalle [0s; 4 s] est (calculs "à la main")

$$\bar{v} = \frac{x(4\,s) - x(0)}{4\,s - 0} = \frac{\frac{64}{3} - 64}{4}\,\frac{m}{s} = -\frac{32}{3}\,\frac{m}{s} \simeq -10.\bar{6}\,\frac{m}{s}$$

a) Avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
Clear[t, x, vx, ax];
```
efface

$$x[t\_] := \frac{1}{3} t^3 - 16\,t + 64;$$

$$\frac{x[4] - x[0]}{4 - 0}$$

$$-\frac{32}{3}$$

b) Moyenne arithmétique de deux vitesses instantanées (calculs "à la main")

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = t^2 - 16$$

$$v_x(0) = -16\,\frac{m}{s}; \qquad v_x(4\,s) = 0;$$

$$\frac{1}{2}\left(v_x(0) + v_x(4\,s)\right) = \frac{1}{2}(-16 + 0)\,\frac{m}{s} = -8\,\frac{m}{s}$$

b) Avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
vx[t_] := x'[t];
```

$$\frac{vx[0] + vx[4]}{2}$$

$$-8$$

c) Accélération $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; unité d'accélération :

$$\frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

d) Accélération instantanée

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = 2\,t$$

L'accélération n'est pas constante.

d) Avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
ax[t_] := vx'[t]
```

```
ax[t]
```

$$2\,t$$

Corrigé de l'exercice 1-3

Vitesse moyenne sur l'intervalle [2 s; 5 s] ("à la main")

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(5\,s) - \vec{r}(2\,s)}{5\,s - 2\,s} = \frac{1}{3\,s}\left(\begin{pmatrix} 4\,m \\ 6\,m \\ 9\,m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10\,m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

Sur les autres intervalles de temps, la vitesse moyenne ne peut pas être déterminée à partir des données.

Vitesse moyenne avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
Clear[r, t, vm, v, norme];
```
effface

```
r[2] = {10, 0, 0}; r[5] = {4, 6, 9};
vm = (r[5] - r[2]) / (5 - 2)
```

$\{-2, 2, 3\}$

La première composante scalaire de la vitesse moyenne est

$$(v_m)_x = -2 \frac{m}{s}$$

La norme de la vitesse moyenne sur l'intervalle [2 s; 5 s] est

$$v_m = \sqrt{\left(-2 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(2 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(3 \frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{17} \frac{m}{s} \simeq 4.123 \frac{m}{s}$$

La norme de la vitesse moyenne sur l'intervalle [2 s; 5 s], avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
norme[v_List] := √v.v ;
norme[vm]
N[norme[vm]]
```
valeur numérique

$\sqrt{17}$

4.12311

Aux temps 2 s et 5 s, les vitesses instantanées sont données :

$$\vec{v}\,(2\,s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{m}{s}, \qquad \vec{v}\,(5\,s) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

Pour les autres valeurs du temps, la vitesse instantanée ne peut pas être déterminée à partir des données.

La première composante scalaire de la vitesse instantanée $\vec{v}$ (2 s) est

$$v_x\,(2\,s) = -1 \frac{m}{s}$$

La vitesse linéaire représente la longueur d'arc parcouru par unité de temps.
La vitesse linéaire instantanée est égale à la norme de la vitesse instantanée (voir cours § 1.2)
On peut calculer la vitesse linéaire aux instants 2 s et 5 s :

$$v\,(2\,s) = \sqrt{\left(-1 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(1 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(4 \frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{18} \frac{m}{s} \simeq 4.243 \frac{m}{s}$$

$$v\,(5\,s) = \sqrt{\left(-4 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(4 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(1 \frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{33} \frac{m}{s} \simeq 5.745 \frac{m}{s}$$

Pour les autres valeurs du temps, la vitesse linéaire instantanée ne peut pas être déterminée à partir des données.

La vitesse linéaire aux instants 2 s et 5 s, avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
v[2] = {-1, 1, 4}; v[5] = {-4, 4, 1};
N[norme[v[2]]]
```
valeur numérique
```
N[norme[v[5]]]
```
valeur numérique

4.24264

5.74456

La moyenne arithmétique des deux vitesses instantanées v[2 s], v[5 s] est

$$\frac{1}{2}\,(v\,(2\,s) + v\,(5\,s)) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\4\\1\end{pmatrix}\right)\frac{m}{s} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}\frac{m}{s} = \begin{pmatrix}-2.5\,\frac{m}{s}\\2.5\,\frac{m}{s}\\2.5\,\frac{m}{s}\end{pmatrix}$$

Cette expression est différente de la vitesse moyenne

$$\vec{v}_m = \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\frac{m}{s}$$

Il faut donc éviter de confondre ces deux expressions.

La moyenne arithmétique des deux vitesses instantanées v[2 s], v[5 s] est, avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

$$\frac{v[2] + v[5]}{2}$$

$$\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

Corrigé de l'exercice 1-4

Accélération moyenne sur l'intervalle [2 s; 5 s] ("à la main")

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}\,(5\,s) - \vec{v}\,(2\,s)}{5\,s - 2\,s} = \frac{1}{3\,s}\left(\begin{pmatrix}-4\,\frac{m}{s}\\4\,\frac{m}{s}\\1\,\frac{m}{s}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\,\frac{m}{s}\\1\,\frac{m}{s}\\4\,\frac{m}{s}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\frac{m}{s^2}$$

Sur les autres intervalles de temps, l'accélération moyenne ne peut pas être déterminée à partir des données.

Accélération moyenne avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
Clear[t, am, v, a, norme];
```
efface
```
v[2] = {-1, 1, 4}; v[5] = {-4, 4, 1};
```

$$am = \frac{v[5] - v[2]}{5 - 2}$$

$$\{-1, 1, -1\}$$

La première composante scalaire de l'accélération moyenne est

$$(a_m)_x = -1\,\frac{m}{s^2}$$

La norme de l'accélération moyenne sur l'intervalle [2 s; 5 s] est

$$a_m = \sqrt{\left(-1\ \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(1\ \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(-1\ \frac{m}{s^2}\right)^2} = \sqrt{3}\ \frac{m}{s^2} \simeq 1.732\ \frac{m}{s^2}$$

La norme de l'accélération moyenne sur l'intervalle [2 s; 5 s], avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
norme[v_List] := √v.v ;
norme[am]
N[norme[am]]
valeur numérique
```

$\sqrt{3}$

1.73205

Aux temps 2 s et 5 s, les accélérations instantanées sont données :

$$\vec{a}\ (2\ s) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}, \qquad \vec{a}\ (5\ s) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}$$

Pour les autres valeurs du temps, l'accélération instantanée ne peut pas être déterminée à partir des données.

La première composante scalaire de l' accélération instantanée $\vec{a}$ (2 s) est

$$a_x\ (2\ s) = -0.5\ \frac{m}{s^2}$$

La norme de l'accélération instantanée aux instants 2 s et 5 s :

$$a\ (2\ s) = \sqrt{\left(-0.5\ \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0.5\ \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(-0.5\ \frac{m}{s^2}\right)^2} \simeq 0.866\ \frac{m}{s^2}$$

$$a\ (5\ s) = \sqrt{\left(-2\ \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(2\ \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(-2\ \frac{m}{s^2}\right)^2} \simeq 3.464\ \frac{m}{s^2}$$

Pour les autres valeurs du temps, l'accélération instantanée ne peut pas être déterminée à partir des données.

La norme de l'accélération aux instants 2 s et 5 s, avec *Mathematica*, en laissant tomber les unités :

```
a[2] = {-0.5, 0.5, -0.5}; a[5] = {-2, 2, -2};
N[norme[a[2]]]
valeur numérique
N[norme[a[5]]]
valeur numérique
```

0.866025

3.4641

L'accélération tangentielle est la projection orthogonale du vecteur accélération sur le vecteur vitesse.
A partir des données, elle est bien déterminée aux instants 2 s et 5 s.

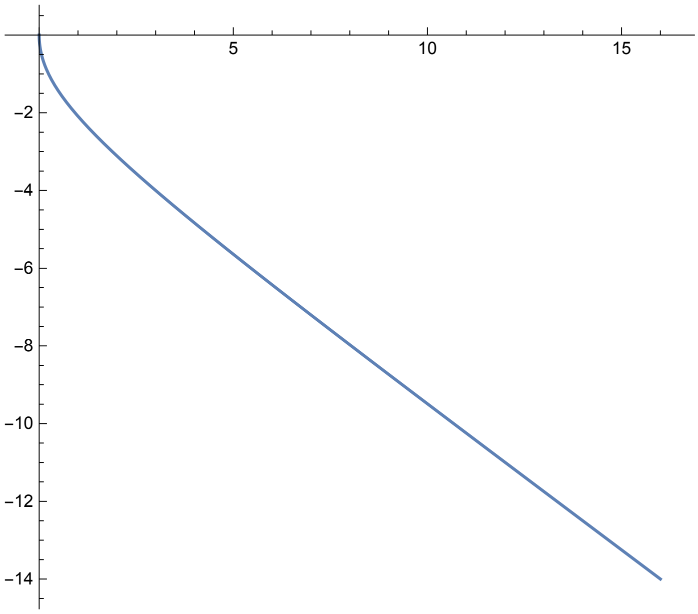
Corrigé de l'exercice 1-5

Considérons le mobile qui se déplace dans un plan selon l'horaire suivant

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} t$$

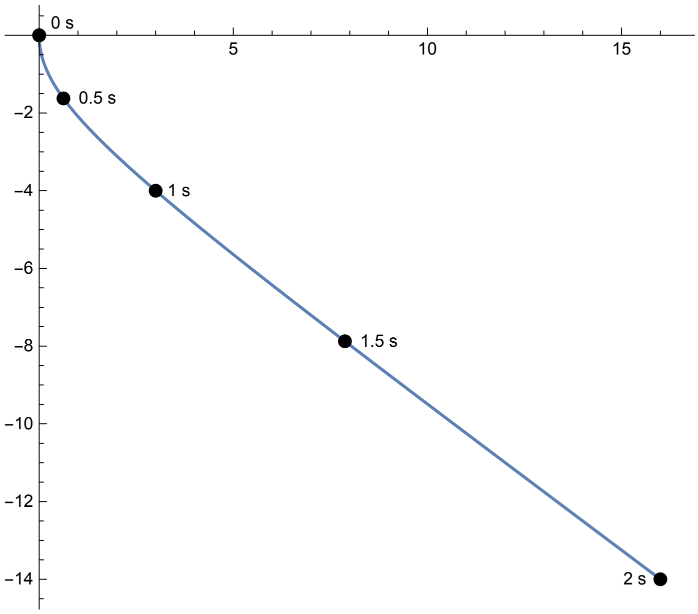
Représentons graphiquement la situation

```
Clear[x, y, r, v, a, t];
effacе
r[t_] := {t³ + 2 t², -t³ - 3 t};
trajectoire = ParametricPlot[r[t], {t, 0, 2},
                représentation graphique de courbes paramétrées
  AspectRatio → Automatic, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
  rapport d'aspect  automatique  origine des axes        zone de tracé  tout
```



Nous ne voyons que sa trajectoire sur l'intervalle de temps [0s; 2s].
Les axes des abscisses et des ordonnées sont graduées en mètres.
Pour mieux percevoir son horaire, nous y superposons des temps

```
temps = Graphics[
  {PointSize[0.02`], Point[r[0]], Point[r[0]], Text[" 0 s", r[0], {-1.5, -1.5}],
   Point[r[0.5`]], Text[" 0.5 s", r[0.5`], {-1.5, 0}], Point[r[1]],
   Text[" 1 s", r[1], {-1.5, 0}], Point[r[1.5`]], Text[" 1.5 s", r[1.5`], {-1.5, 0}],
   Point[r[2]], Text[" 2 s", r[2], {2, 0}]}, DisplayFunction → Identity];
Show[trajectoire, temps, DisplayFunction → Identity]
```



Pour déterminer la vitesse du mobile, on dérive l'horaire par rapport au temps.

```
v[t_] := r'[t]
```

```
v[t]
```

$\{4t + 3t^2, -3 - 3t^2\}$

La vitesse varie au fil du temps

```
v[0]
```

{0, -3}

```
v[1]
```

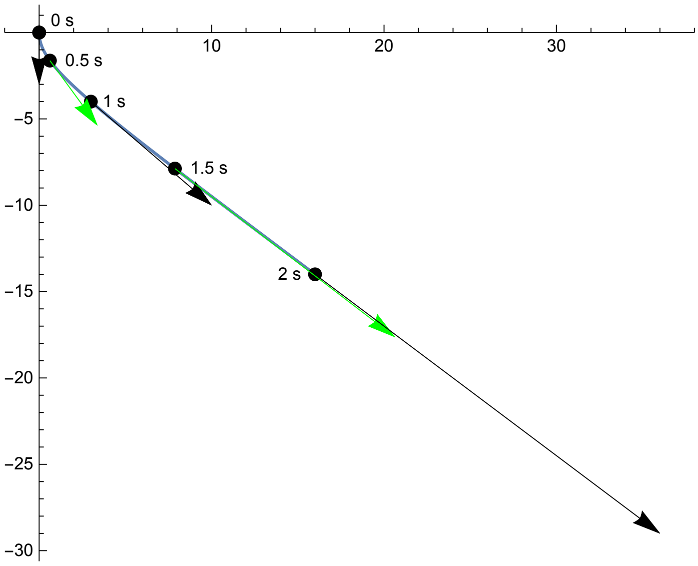
{7, -6}

```
v[2]
```

{20, -15}

Au graphique précédent, superposons-y des vecteurs vitesses

```
vitesses =
  Graphics[{Arrow[{{0, 0}, v[0]}], {Green, Arrow[{r[0.5`], r[0.5`] + v[0.5`]}]},
  graphique  flèche                 vert   flèche
    Arrow[{r[1], r[1] + v[1]}], {Green, Arrow[{
    flèche                       vert   flèche
       r[1.5`], r[1.5`] + v[1.5`]}]}, Arrow[{r[2], r[2] + v[2]}]},
                                      flèche
   DisplayFunction → Identity];
   fonction d'affichage  identité
Show[trajectoire, temps, vitesses, DisplayFunction → $DisplayFunction]
montre                             fonction d'affichage  fonction d'affichage par défaut
```



A chaque vecteur vitesse correspond sa norme appelée "vitesse linéaire instantanée"

```
norme[u_List] := √u.u ;
N[norme[v[0]]]
valeur numérique
```

```
3.
```

```
N[norme[v[1]]]
valeur numérique
```

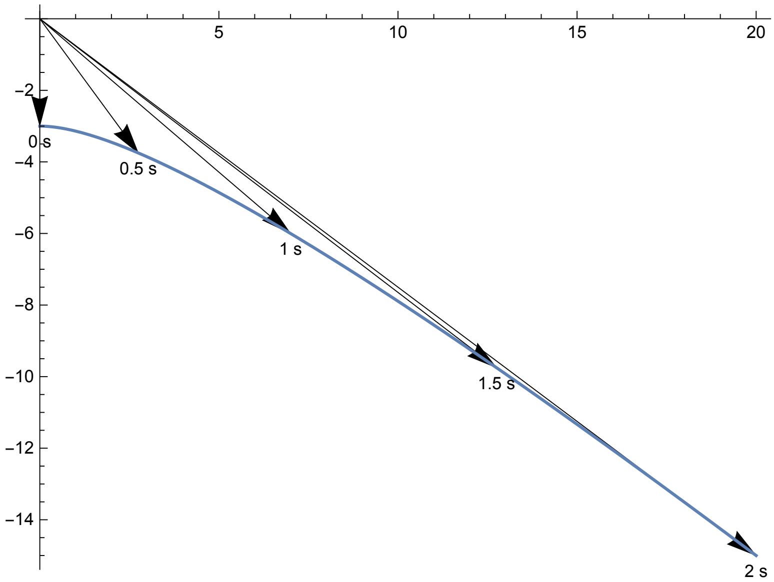
```
9.21954
```

```
N[norme[v[2]]]
valeur numérique
```

```
25.
```

Dessinons maintenant l'hodographe du mouvement.
On donne aux vecteurs vitesses l'origine commune O et on dessine la courbe t ↦ v(t)

```
hodographe = ParametricPlot[v[t], {t, 0, 2}, AspectRatio → Automatic,
             représentation graphique de courbes par⋯ rapport d'aspect automatique
   AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All, DisplayFunction → Identity];
   origine des axes     zone de tracé  tout  fonction d'affichage  identité
o = {0, 0};
vitesses = Graphics[{Arrow[{o, v[0]}], Arrow[{o, v[0.5`]}], Arrow[{o, v[1]}],
           graphique  flèche              flèche                flèche
    Arrow[{o, v[1.5`]}], Arrow[{o, v[2]}]}, DisplayFunction → Identity];
    flèche               flèche             fonction d'affichage  identité
temps = Graphics[{Text["0 s", v[0], {0, 2}], Text["0.5 s", v[0.5`], {0, 2}],
        graphique texte                      texte
    Text["1 s", v[1], {0, 2}], Text["1.5 s", v[1.5`], {0, 2}],
    texte                      texte
    Text["2 s", v[2], {0, 2}]}, DisplayFunction → Identity];
    texte                       fonction d'affichage  identité
Show[vitesses, hodographe, temps, Axes → True, PlotRange → All,
montre                           axes    vrai  zone de tracé  tout
 ImageSize → {400, 300}, DisplayFunction → $DisplayFunction]
 taille d'image          fonction d'affichage  fonction d'affichage par défaut
```



Dans ce graphique, les axes des abscisses et des ordonnées sont gradués en mètres par seconde.

```
a[t_] := v'[t]
```

```
a[t]
```

$\{4 + 6\,t,\ -6\,t\}$

L'accélération varie. Sa norme *a* est

```
norme[a[t]]
```

$\sqrt{36\,t^2 + (4 + 6\,t)^2}$

Corrigé de l'exercice 1-6

x = 2 t-1 représente <u>l'horaire</u> d'un mouvement <u>en dimension 1</u>:

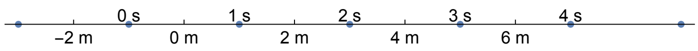
le mobile se déplace sur un axe gradué (par exemple sur un rail).

$$v(t) = \dot{x}(t) = 2$$

Son mouvement est rectiligne <u>uniforme</u>:

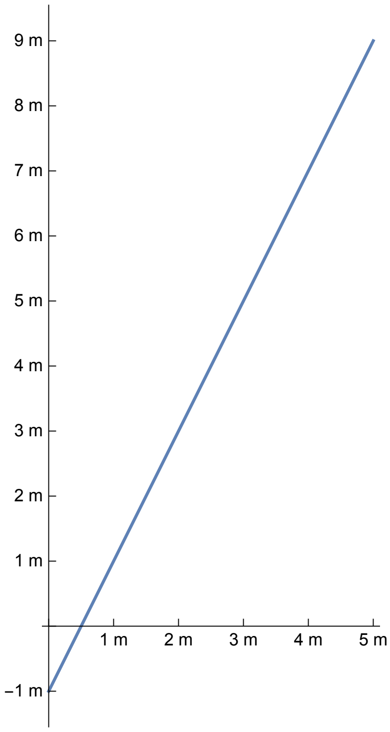
(si x est en mètres et t en secondes, sa vitesse est de 2 m/s).

t	0	1 s	2 s	3 s
$x(t)$	−1 m	1 m	3 m	5 m



y = 2 x-1 représente la <u>trajectoire</u> d'un mouvement <u>en dimension 2</u>:

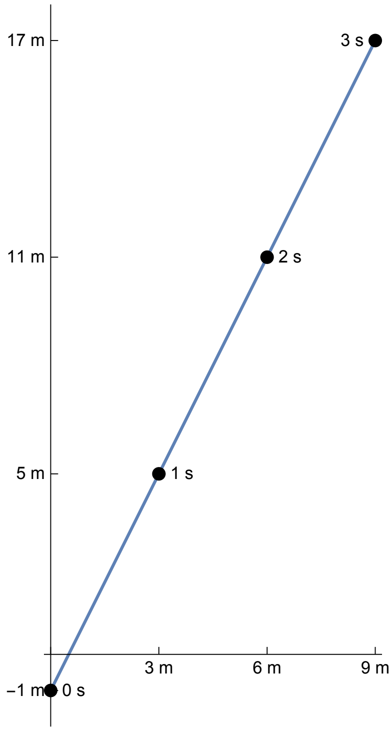
le mobile se déplace sur une droite dans un plan (par exemple, sur une table de billard); son mouvement est rectiligne.



On n'a pas d'information sur son horaire.
Il est possible que son mouvement soit uniforme, par exemple

$$x(t) = 3t$$
$$y(t) = 2x(t) - 1 = 6t - 1$$

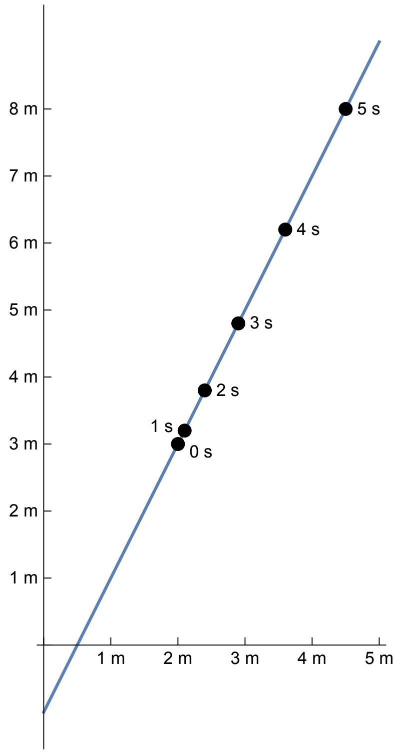
t	0	1 s	2 s	3 s
$x(t)$	0	3 m	6 m	9 m
$y(t)$	−1 m	5 m	11 m	17 m



Mais il est aussi possible que son mouvement ne soit pas uniforme (c'est-à-dire que sa vitesse varie), par exemple

$$x(t) = 0.1\,t^2 + 2$$
$$y(t) = 2\,x(t) - 1 = 0.2\,t^2 + 3$$

t	0	s	2 s	3 s	4 s	5 s
$x(t)$	2. m	2.1 m	2.4 m	2.9 m	3.6 m	4.5 m
$y(t)$	3. m	3.2 m	3.8 m	4.8 m	6.2 m	8. m



On remarquera en passant que le mot trajectoire est utilisé dans deux sens :

au sens strict, la trajectoire est l'ensemble de tous les points par lesquels passe le mobile (voir le premier exemple);

au sens large, la trajectoire est une courbe qui contient toutes les positions du mobile (voir le deuxième exemple où x≥2 et y≥3; le mobile ne passe jamais en (0 m; -1 m)).

Comme on a vu dans les deux exemples qui précèdent, on peut choisir librement n'importe quel horaire x(t) que l'on substitue ensuite dans $y(t) = 2\,x(t) - 1$, par exemple

$$x(t) = -\sin(t)$$
$$y(t) = -2\sin(t) - 1$$

Corrigé de l'exercice 1-7

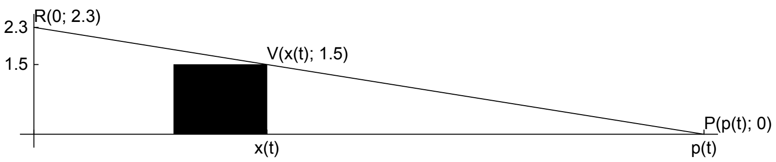
Introduisons un repère orthonormé dans lequel nous plaçons les points

R (0; 2.3 m) = réverbère (source ponctuelle de lumière);

V (x(t); 1.5 m) = voiture (point avant supérieur) où x(t) est l'horaire de la voiture;

P (p(t); 0) = point le plus éloigné de l'ombre où

p(t) désigne l'horaire de la frontière entre l'ombre et la clarté sur le sol.



t	0	s	2 s	3 s	4 s	5 s
$x(t)$	5 m	8 m	11 m	14 m	17 m	20 m

$$v_{\text{voiture}}(t) = \dot{x}(t) = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Le véhicule s'éloigne du réverbère à la vitesse constante de $3\,\frac{m}{s}$. Un tel mouvement est appelé rectiligne uniforme.

Pour calculer l'horaire de la frontière p(t), il faut repérer, dans la figure ci-dessus, des triangles homothétiques et leur appliquer le théorème de Thalès

$$\frac{p(t)}{2.3\,\text{m}} = \frac{x(t)}{2.3\,\text{m} - 1.5\,\text{m}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(t) = \frac{2.3}{0.8}\,x(t) = 8.625\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t + 14.375\,\text{m}$$

$$v_{\text{frontière}}(t) = \dot{p}(t) = 8.625\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (= \text{constante})$$

Si on s'intéresse à la longueur de l'ombre située à l'avant de la voiture, on a

$$\ell(t) = p(t) - x(t) = 5.625\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,t + 9.375\,\text{m}$$

$$v_{\text{allongement}}(t) = \dot{\ell}(t) = 5.625\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (= \text{constante})$$

Corrigé de l'exercice 1-9

$$x(t) = -t^2 + 7t - 6 \qquad y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 5t + 1 \qquad z(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 5$$

$$x(3) = 6 \qquad y(3) = -\frac{19}{2} \qquad z(3) = \frac{7}{2}$$

$$v_x(t) = -2t + 7 \qquad v_y(t) = t - 5 \qquad v_z(t) = -t + 1$$

$$v_x(3) = 1 \qquad v_y(3) = -2 \qquad v_z(3) = -2$$

$$a_x(3) = -2 \qquad a_y(3) = 1 \qquad a_z(3) = -1$$

a) $x(3) > 0$

$v_x(3) > 0$

$a_x(3) < 0$

Interprétation: à l’heure $t = 3$,

l’abscisse du mobile est située sur la demi-droite $x > 0$;

le mobile se déplace dans le sens de $\vec{i}$;

la vitesse diminue (le mobile ralentit);

$|x(t)|$ augmente, c’est-à-dire le mobile s’éloigne de l’origine.

b) $v_y(3)$ est négatif et y(t) est décroissant au voisinage de 3,

$a_y(3)$ est positif et $v_y(t)$ est croissant au voisinage de 3.

Interprétation: à l'heure t=3,

l'ordonnée du mobile est située sur la demi-droite y<0,

y(t) diminue c'est-à-dire va dans le sens de $-\vec{j}$,

la vitesse est négative et augmente, c'est-à-dire évolue vers 0;

la vitesse linéaire diminue.

c) z(3) est positif,

$v_z(3)$ est négatif et z(t) est décroissant au voisinage de 3,

$a_z(3)$ est négatif et $v_z(t)$ est décroissant au voisinage de 3.

Interprétation: à l'heure t=3,

la cote du mobile est située sur la demi-droite z>0,

z(t) diminue c'est-à-dire va dans le sens de $-\vec{k}$,

la vitesse est négative et diminue, c'est-à-dire s'éloigne de 0;

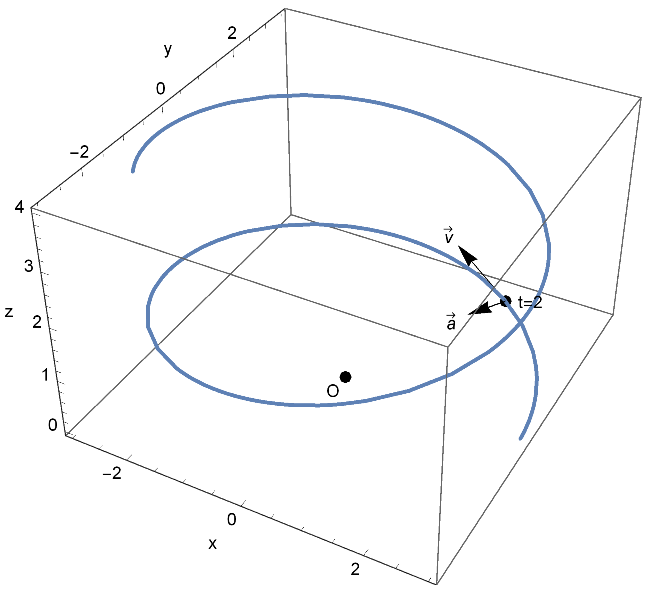
la vitesse linéaire augmente.

Corrigé de l'exercice 1-11

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ 3\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \frac{t}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \frac{3}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}; \qquad \vec{v}\,(2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sin(1) \\ \frac{3}{2}\cos(1) \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1.26221 \\ 0.810453 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\frac{3}{4}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{a}\,(2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\frac{3}{4}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -0.405227 \\ -0.631103 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Corrigé de l'exercice 1-8 [Supplément facultatif]

a) S'il voyageait durant le même temps à $3\,\frac{km}{h}$ puis à $7\,\frac{km}{h}$, sa vitesse linéaire moyenne serait effectivement de $5\,\frac{km}{h}$. Mais, comme l'ascension dure plus longtemps que la descente, sa vitesse linéaire moyenne sera inférieure à $5\,\frac{km}{h}$.

b) Notations :

d = longueur de la montée = longueur de la descente;

$t_1 = \frac{d}{3\,\frac{km}{h}}$ = durée de la montée; $t_2 = \frac{d}{7\,\frac{km}{h}}$ = durée de la descente

0 h = heure du départ; s(0 h) = 0 m = abscisse curviligne au départ;

t_1 = heure du passage au sommet; $s(t_1) = d$ = abscisse curviligne au sommet;

$t_1 + t_2$= heure de l'arrivée;

$\boxed{s(t_1 + t_2) = 2\,d}$ **= abscisse curviligne en fin de course.**

L'horaire est une fonction affine par morceaux:

$$s(t) = 3\,\frac{km}{h}\,t \qquad \text{pour } 0 \le t \le t_1$$

$$s(t) = d + 7\,\frac{km}{h}\,(t - t_1) \qquad \text{pour } t_1 \le t \le t_1 + t_2$$

La vitesse linéaire moyenne est

$$\frac{s(t_1+t_2) - s(0)}{t_1 + t_2 - 0} = \frac{2\,d - 0}{\frac{d}{3\,\frac{km}{h}} + \frac{d}{7\,\frac{km}{h}}} = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}\,\frac{km}{h} = \frac{2}{\frac{10}{21}}\,\frac{km}{h} = 4.2\,\frac{km}{h}$$

c) Notations :

d = longueur de la montée = longueur de la descente;

$t_1 = \frac{d}{3\,\frac{km}{h}}$ = durée de la montée; $t_2 = \frac{d}{7\,\frac{km}{h}}$ = durée de la descente

0 h = heure du départ; x(0 h) = 0 m = abscisse du marcheur au départ;

t_1 = heure du passage au sommet; $x(t_1) = d$ = abscisse du marcheur sommet;

$t_1 + t_2$= heure de l'arrivée;

$\boxed{x(t_1 + t_2) = 0\,m}$ **= abscisse du marcheur en fin de course.**

L'horaire est une fonction affine par morceaux:

$$x(t) = 3\,\frac{km}{h}\,t \qquad \text{pour } 0 \le t \le t_1$$

$$x(t) = d - 7\,\frac{km}{h}\,(t - t_1) \qquad \text{pour } t_1 \le t \le t_1 + t_2$$

La vitesse moyenne est

$$\frac{x(t_1+t_2) - x(0)}{t_1 + t_2 - 0} = \frac{0 - 0}{\frac{d}{3\,\frac{km}{h}} + \frac{d}{7\,\frac{km}{h}}} = 0\,\frac{km}{h}$$

En effet, puisque le marcheur est revenu à son point de départ, le déplacement total est nul.

<u>Moralité : il faut distinguer</u>

"vitesse moyenne" et "vitesse linéaire moyenne";

"abscisse" et "abscisse curviligne".

Au besoin, relisez les § 1.5 et 1.6.

Corrigé de l'exercice 1-10 [Facultatif]

$$\vec{v}_{\text{moyenne}[t,\,t+\Delta t]} = \frac{\vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{x\,(t+\Delta t) - x\,(t)}{\Delta t} \\ \frac{y\,(t+\Delta t) - y\,(t)}{\Delta t} \\ \frac{z\,(t+\Delta t) - z\,(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\left((t+\Delta t)^2+3\right) - \left(t^2+3\right)}{\Delta t} \\ \frac{\left(-(t+\Delta t)+5\right) - \left(-t+5\right)}{\Delta t} \\ \frac{\left(\frac{1}{3}(t+\Delta t)^3+1\right) - \left(\frac{1}{3}t^3+1\right)}{\Delta t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \\ \frac{-\Delta t}{\Delta t} \\ \frac{(t+\Delta t)^3 - t^3}{3\,\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2 + 2\,t\,\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} \\ -1 \\ \frac{t^3 + 3\,t^2\,\Delta t + 3\,t\,\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^3}{3\,\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\,t\,\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} \\ -1 \\ \frac{3\,t^2\,\Delta t + 3\,t\,\Delta t^2 + \Delta t^3}{3\,\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t + \Delta t \\ -1 \\ \frac{3\,t^2 + 3\,t\,\Delta t + \Delta t^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{\text{moyenne}[t,\,t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} 2\,t + \Delta t \\ -1 \\ \frac{3\,t^2 + 3\,t\,\Delta t + \Delta t^2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ -1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Du point de vue mathématique, nous avons calculé la dérivée de la fonction $\vec{r}(t)$, c'est-à-dire

$$\dot{\vec{r}}\,(t)$$

Du point de vue cinématique, nous avons obtenu la vitesse à l'instant t, c'est-à-dire

$$\vec{v}\,(t)$$

Nous pouvons effectuer le calcul précédent d'une autre manière, en remplaçant le calcul de limites par le calcul de dérivées

$$\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) = \begin{pmatrix} (t^2+3)^\bullet \\ (-t+5)^\bullet \\ \left(\frac{1}{3}\,t^3+1\right)^\bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ -1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Calculons l'accélération

$$\vec{a}_{\text{moyenne}[t,\,t+\Delta t]} = \frac{\vec{v}\,(t+\Delta t) - \vec{v}\,(t)}{\Delta t} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{v_x\,(t+\Delta t) - v_x\,(t)}{\Delta t} \\ \frac{v_y\,(t+\Delta t) - v_y\,(t)}{\Delta t} \\ \frac{v_z\,(t+\Delta t) - v_z\,(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\,(t+\Delta t) - 2\,t}{\Delta t} \\ \frac{(-1) - (-1)}{\Delta t} \\ \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\,\Delta t}{\Delta t} \\ \frac{0}{\Delta t} \\ \frac{t^2 + 2\,t\,\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2\,t\,\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2\,t + \Delta t \end{pmatrix}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{moyenne}[t,\,t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2\,t + \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

Du point de vue mathématique, nous avons calculé la dérivée de la fonction $\vec{v}(t)$, c'est-à-dire

$$\dot{\vec{v}}\,(t)$$

Du point de vue cinématique, nous avons obtenu l'accélération à l'instant t, c'est-à-dire

$$\vec{a}\,(t)$$

Nous pouvons effectuer le calcul précédent d'une autre manière, en remplaçant le calcul de limites par le calcul de dérivées

$$\vec{a}\,(t) = \dot{\vec{v}}\,(t) = \begin{pmatrix} (2\,t)^\bullet \\ (-1)^\bullet \\ (t^2)^\bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2\,t \end{pmatrix}$$