Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : § 3 Ajustements au sens des moindres carrés
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/ajustements/3_ajust.pdf

Corrigé de l'exercice 3.1 - 1

D'après le cours, on a

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

Autrement dit, les équations normales s'écrivent

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \qquad (\text{éq. I})$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b\, n = \sum_{i=1}^n y_i \qquad (\text{éq. II})$$

<u>Partie a)</u>

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n (y_i - (a\, x_i + b)) = \sum_{i=1}^n y_i - \left(a \sum_{i=1}^n x_i + b\, n\right) = 0 \quad \text{d'après (éq. II)}$$

<u>Partie b)</u>

$$\sum_{i=1}^n x_i\, e_i = \sum_{i=1}^n x_i\, (y_i - (a\, x_i + b)) = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i - \left(a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i\right) = 0 \quad \text{d'après (éq. I)}$$

Corrigé de l'exercice 3.1 - 2 a)

<u>1-ère étape: énoncé du problème d'ajustement</u>

Ajuster la droite $y = a\, x$ aux données.

<u>2-ème étape: réduction à un problème de moindres carrés</u>

Les écarts suivants sont appelés "*résidus*"

$$e_1 = y_1 - a\, x_1, \quad e_2 = y_2 - a\, x_2, \quad \ldots, \quad e_n = y_n - a\, x_n$$

"*Ajuster la droite au sens des moindres carrés*" signifie qu'il faut déterminer *a* de manière que la somme des carrés des résidus soit minimale

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = \min$$

<u>3-ème étape: réduction à un problème de projection</u>

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = (y_1 - a\, x_1)^2 + (y_2 - a\, x_2)^2 + \ldots + (y_n - a\, x_n)^2 =$$

$$\left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 - a\, x_1 \\ y_2 - a\, x_2 \\ \ldots \\ y_n - a\, x_n \end{pmatrix} \right\| \right)^2 = \left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \right)^2$$

Autrement dit, dans $\mathbb{R}^n$, on donne le vecteur

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et le sous-espace G, engendré par le vecteur

$$\overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ dont les éléments sont } \quad \vec{g} = a\,\overrightarrow{g_1}$$

Déterminez le nombres *a* tel que

$$\left(\| \vec{y} - \vec{g} \| \right)^2 = \min$$

Nous avons étudié, dans le § 2, que la solution est la projection orthogonale $\vec{g}$ de $\vec{y}$ sur *G*.

4-ème étape: réduction à un système d'équations normales

La projection $\vec{g}$ est déterminée par les conditions suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{g} = a\,\overrightarrow{g_1} \\ \vec{e} = \vec{y} - \vec{g} = \vec{y} - a\,\overrightarrow{g_1} \\ \vec{e} \,.\, \overrightarrow{g_1} = 0 \end{array}}$$

On obtient ainsi l' équation normale

$$\left(\vec{y} - a\,\overrightarrow{g_1}\right).\overrightarrow{g_1} = 0$$

$$\vec{y}.\overrightarrow{g_1} - a\,\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1} = 0$$

$$\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1}\,a = \vec{y}.\overrightarrow{g_1}$$

5-ème étape: résolution des équations normales

$$\boxed{a = \frac{\vec{y}.\overrightarrow{g_1}}{\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

Numériquement,

```
x = {1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 14};
y = {1, 2, 4, 4, 5, 7, 8, 9};
a = x.y / x.x
```

$$\frac{91}{131}$$

Corrigé de l'exercice 3.1 - 2 b)

1-ère étape: énoncé du problème d'ajustement

Ajuster la droite $y = b$ aux données.

2-ème étape: réduction à un problème de moindres carrés

Les écarts suivants sont appelés "*résidus*"

$$e_1 = y_1 - b, \; e_2 = y_2 - b, \; \ldots, \; e_n = y_n - b$$

"*Ajuster la droite au sens des moindres carrés*" signifie qu'il faut déterminer *b* de manière que la somme des carrés des résidus soit minimale

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = \min$$

3-ème étape: réduction à un problème de projection

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 =$$

$$(y_1 - b)^2 + (y_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - b)^2 = \left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 - b \\ y_2 - b \\ \ldots \\ y_n - b \end{pmatrix} \right\| \right)^2 = \left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \right)^2$$

Autrement dit, dans $\mathbb{R}^n$, on donne le vecteur

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et le sous-espace G, engendré par le vecteur

$$\overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dont les éléments sont } \quad \vec{g} = b\,\overrightarrow{g_1}$$

Déterminez le nombres *b* tel que

$$\left(\left\| \vec{y} - \vec{g} \right\| \right)^2 = \min$$

Nous avons étudié, dans le § 2, que la solution est la projection orthogonale $\vec{g}$ de $\vec{y}$ sur *G*.

4-ème étape: réduction à un système d'équations normales

La projection $\vec{g}$ est déterminée par les conditions suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{g} = b\,\overrightarrow{g_1} \\ \vec{e} = \vec{y} - \vec{g} = \vec{y} - b\,\overrightarrow{g_1} \\ \vec{e} \,.\, \overrightarrow{g_1} = 0 \end{array}}$$

On obtient ainsi l' équation normale

$$\left(\vec{y} - b\,\overrightarrow{g_1}\right) . \overrightarrow{g_1} = 0$$

$$\vec{y} . \overrightarrow{g_1} - b\,\overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1} = 0$$

$$\overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1}\, b = \vec{y} . \overrightarrow{g_1}$$

5-ème étape: résolution des équations normales

$$\boxed{b = \frac{\vec{y} . \overrightarrow{g_1}}{\overrightarrow{g_1} . \overrightarrow{g_1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}$$

Numériquement,

```
y = {1, 2, 4, 4, 5, 7, 8, 9};
b = Apply[Plus, y] / Length[y]
```

```
5
```

Interprétation : la ***moyenne arithmétique*** des nombres $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est la quantité *b* pour laquelle la somme des carrés des écarts est minimale:

$$(y_1 - b)^2 + (y_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - b)^2 = \min$$

Corrigé de l'exercice 3.1 - 3

<u>1-ère étape: énoncé du problème d'ajustement</u>

Ajuster la parabole $y = a\,x^2 + b\,x + c$ aux données.

<u>2-ème étape: réduction à un problème de moindres carrés</u>

Les écarts suivants sont appelés "*résidus*"

$$e_1 = y_1 - a\,x_1^2 - b\,x_1 - c, \quad e_2 = y_2 - a\,x_2^2 - b\,x_2 - c, \quad \ldots, \quad e_n = y_n - a\,x_n^2 - b\,x_n - c$$

"*Ajuster la droite au sens des moindres carrés*" signifie qu'il faut déterminer *a, b, c* de manière que la somme des carrés des résidus soit minimale

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = \min$$

<u>3-ème étape: réduction à un problème de projection</u>

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = \left(y_1 - a\,x_1^2 - b\,x_1 - c\right)^2 + \left(y_2 - a\,x_2^2 - b\,x_2 - c\right)^2 + \ldots + \left(y_n - a\,x_n^2 - b\,x_n - c\right)^2 =$$

$$\left(\left\|\begin{pmatrix} y_1 - a\,x_1^2 - b\,x_1 - c \\ y_2 - a\,x_2^2 - b\,x_2 - c \\ \ldots \\ y_n - a\,x_n^2 - b\,x_n - c \end{pmatrix}\right\|\right)^2 = \left(\left\|\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \ldots \\ x_n^2 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}\right\|\right)^2$$

Autrement dit, dans $\mathbb{R}^n$, on donne le vecteur

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et le sous-espace *G*, engendré par les vecteurs

$$\vec{g_1} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \ldots \\ x_n^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{g_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dont les éléments sont } \quad \vec{g} = a\,\vec{g_1} + b\,\vec{g_2} + c\,\vec{g_3}$$

Déterminez le nombres *a, b, c* tels que

$$\left(\|\vec{y} - \vec{g}\|\right)^2 = \min$$

Nous avons étudié, dans le § 2, que la solution est la projection orthogonale $\vec{g}$ de $\vec{y}$ sur *G*.

<u>4-ème étape: réduction à un système d'équations normales</u>

La projection $\vec{g}$ est déterminée par les conditions suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{g} = a\,\vec{g_1} + b\,\vec{g_2} + c\,\vec{g_3} \\ \vec{e} = \vec{y} - \vec{g} = \vec{y} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3} \\ \vec{e}\,.\vec{g_1} = 0\,; \quad \vec{e}\,.\vec{g_2} = 0\,; \quad \vec{e}\,.\vec{g_3} = 0 \end{array}}$$

On obtient ainsi les équations normales

$$\left(\vec{y} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}\right).\vec{g_1} = 0\,; \quad \left(\vec{y} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}\right).\vec{g_2} = 0\,;$$
$$\left(\vec{y} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}\right).\vec{g_3} = 0$$

$$\vec{y}.\vec{g_1} - a\,\vec{g_1}.\vec{g_1} - b\,\vec{g_2}.\vec{g_1} - c\,\vec{g_3}.\vec{g_1} = 0\,;$$
$$\vec{y}.\vec{g_2} - a\,\vec{g_1}.\vec{g_2} - b\,\vec{g_2}.\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}.\vec{g_2} = 0\,; \quad \vec{y}.\vec{g_3} - a\,\vec{g_1}.\vec{g_3} - b\,\vec{g_2}.\vec{g_3} - c\,\vec{g_3}.\vec{g_3} = 0$$

$$\vec{g_1}.\vec{g_1}\,a + \vec{g_2}.\vec{g_1}\,b + \vec{g_3}.\vec{g_1}\,c = \vec{y}.\vec{g_1}\,;$$
$$\vec{g_1}.\vec{g_2}\,a + \vec{g_2}.\vec{g_2}\,b + \vec{g_3}.\vec{g_2}\,c = \vec{y}.\vec{g_2}\,; \quad \vec{g_1}.\vec{g_3}\,a + \vec{g_2}.\vec{g_3}\,b + \vec{g_3}.\vec{g_3}\,c = \vec{y}.\vec{g_3}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{g_1}\cdot\vec{g_1} & \vec{g_2}\cdot\vec{g_1} & \vec{g_3}\cdot\vec{g_1} \\ \vec{g_2}\cdot\vec{g_1} & \vec{g_2}\cdot\vec{g_2} & \vec{g_3}\cdot\vec{g_2} \\ \vec{g_1}\cdot\vec{g_3} & \vec{g_2}\cdot\vec{g_3} & \vec{g_3}\cdot\vec{g_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}\cdot\vec{g_1} \\ \vec{y}\cdot\vec{g_2} \\ \vec{y}\cdot\vec{g_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

<u>5-ème étape: résolution des équations normales</u>

Numériquement,

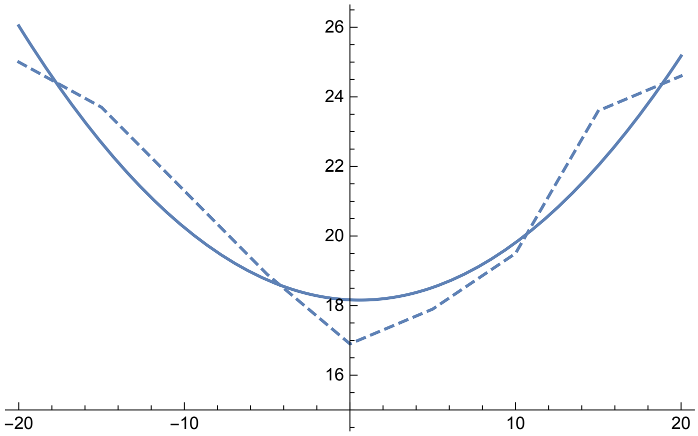
```
x = Range[-20, 20, 5];
    plage
y = {25, 23.7, 21.3, 18.9, 16.9, 17.9, 19.5, 23.6, 24.6};
m = ( x^2.x^2      x^2.x             x.x
      x^2.x        x.x          Apply[Plus, x]
      x.x     Apply[Plus, x]          9        )
{{442500, 0, 1500}, {0, 1500, 0}, {1500, 0, 9}}

v = {x^2.y , x.y, Apply[Plus, y]}
                  remp⋯ plus
{35482.5, -32.5, 191.4}
```

$$\begin{pmatrix} 442500 & 0 & 1500 \\ 0 & 1500 & 0 \\ 1500 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35482.5 \\ -32.5 \\ 191.4 \end{pmatrix}$$

```
{a, b, c} = LinearSolve[m, v]
            résous équation linéaire
{0.0186104, -0.0216667, 18.1649}

Show[Plot[a t^2 + b t + c, {t, -20, 20}], ListLinePlot[Transpose[{x, y}],
mon⋯ tracé de courbes                     tracé de liste de ⋯ transposée
  PlotStyle → Dashed], AxesOrigin → {0, 15}, PlotRange → All]
  style de tracé rayé  origine des axes      zone de tracé tout
```



Corrigé de l'exercice 3.1 - 4 a)

```
x = {70, 68, 63, 72, 60, 66, 70, 74, 65, 62, 67, 65};
y = {155, 152, 150, 180, 135, 156, 168, 178, 160, 132, 145, 139};
```

<u>Première méthode</u>:

1°) permuter (x, y);

2°) ajuster la fonction affine aux données modifiées (y, x); c'est la droite de régression de x en fonction de y.

Ajustons la droite $x = m\,y + p$ au sens des moindres carrés:

```
Fit[Transpose[{y, x}], {t, 1}, t]
aju·· transposée
```

31.1078 + 0.231733 t

$$x = x(y) = 31.1078 + 0.231733\,y$$

Deuxième méthode:

1°) ajuster la fonction affine aux données (x, y); c'est la droite de régression de y en fonction de x;

2°) permuter (x, y), c'est-à-dire prendre la fonction réciproque.

Ajustons d'abord la droite $y = a\,x + b$ au sens des moindres carrés:

```
Fit[Transpose[{x, y}], {t, 1}, t]
aju·· transposée
```

-60.7461 + 3.21565 t

$$y = y(x) = -60.7461 + 3.21565\,x$$

Calculons la réciproque de cette première fonction:

$$y + 60.7461 = 3.21565\,x$$

$$\frac{y + 60.7461}{3.21565} = x$$

$$18.8908 + 0.310979\,y = x$$

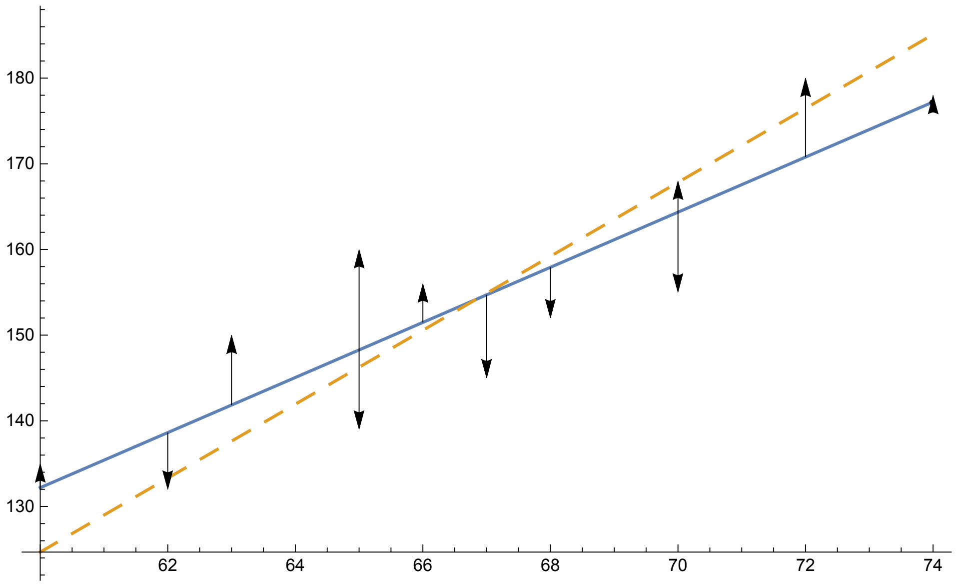
$$x = x(y) = 18.8908 + 0.310979\,y$$

Comparaison des deux méthodes

Pourquoi obtient-on des résultats différents ? Considérons les figures suivantes.
Dans la deuxième méthode, lorsqu'on calcule la droite de régression de y en fonction de x, les écarts, qui sont de la forme

$$e_i = y_i - a\,x_i - b$$

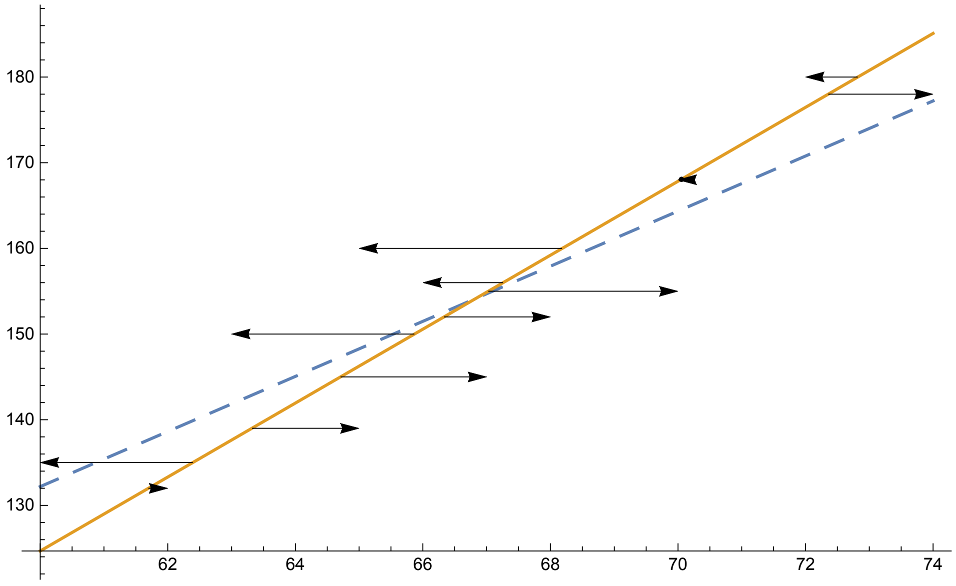
sont représentés par des vecteurs **verticaux**



tandis que, dans la première méthode, lorsqu'on calcule la droite de régression de *x* en fonction de *y*, les écarts, qui sont de la forme

$$f_i = x_i - m\,y_i - p$$

sont - dans le même repère (x, y) - représentés par des vecteurs **horizontaux**



Comme il s'agit de deux problèmes différents, on obtient généralement des résultats différents.

Corrigé de l'exercice 3.1 - 4 b)

La méthode consiste à déterminer la droite de régression de *x* en fonction de *y*

```
Fit[Transpose[{y, x}], {t, 1}, t]
```
ajustement · transposée

31.1078 + 0.231733 t

$$x = x(y) = 31.1078 + 0.231733\,y$$

puis à récrire le résultat sous la forme demandée

$$x - 31.1078 = 0.231733\, y$$

$$y = \frac{x - 31.1078}{0.231733} = 4.31531\, x - 134.24$$

$$a = 4.31531; \qquad b = -134.24$$

Corrigé de l'exercice 3.2 - 1

<u>1-ère étape: énoncé du problème d'ajustement</u>

Ajuster la droite $y = a\,x + b$ aux données, chaque donnée étant affectée d'un poids c_i donné.
Nous supposons que tous les poids c_i sont positifs.

<u>2-ème étape: réduction à un problème de moindres carrés</u>

Les écarts suivants sont appelés "*résidus*"

$$e_1 = y_1 - a\,x_1 - b,\ \ e_2 = y_2 - a\,x_2 - b,\ \ \ldots,\ e_n = y_n - a\ x_n - b$$

tandis que les "*carrés pondérés des résidus*" sont

$$c_1\,e_1^2 = c_1\,(y_1 - a\,x_1 - b)^2,\ \ c_2\,e_2^2 = c_2\,(y_2 - a\,x_2 - b)^2,\ \ \ldots,\ c_n\,e_n^2 = c_n\,(y_n - a\ x_n - b)^2$$

"*Ajuster la droite au sens des moindres carrés avec les poids donnés*" signifie qu'il faut déterminer *a, b* de manière que la somme des <u>carrés pondérés des résidus</u> soit minimale

$$c_1\,e_1^2 + c_2\,e_2^2 + \ldots + c_n\,e_n^2 = \min$$

<u>3-ème étape: réduction à un problème de projection</u>

Introduisons le **produit scalaire pondéré de $\mathbb{R}^n$**

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = c_1\,x_1\,y_1 + c_2\,x_2\,y_2 + \ldots\ c_n\,x_n\,y_n$$

Le produit scalaire pondéré possède les propriétés caractéristiques du produit scalaire telles que

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle$$

Le carré scalaire pondéré de $\vec{x}$ est de la forme

$$\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = c_1\,x_1^2 + c_2\,x_2^2 + \ldots\ c_n\,x_n^2$$

Avec cette notation, la somme des carrés pondérés des résidus peut s'écrire comme suit:

$$c_1\,e_1^2 + c_2\,e_2^2 + \ldots + c_n\,e_n^2 = \left\langle \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 - a\,x_1 - b \\ y_2 - a\,x_2 - b \\ \ldots \\ y_n - a\ x_n - b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 - a\,x_1 - b \\ y_2 - a\,x_2 - b \\ \ldots \\ y_n - a\ x_n - b \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Autrement dit, dans $\mathbb{R}^n$, on donne le vecteur

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et le sous-espace *G*, engendré par le vecteur

$$\vec{g_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{g_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dont les éléments sont } \quad \vec{g} = a\,\vec{g_1} + b\,\vec{g_2}$$

Déterminez les nombres *a, b* tels que

$$\langle \vec{y} - \vec{g} \mid \vec{y} - \vec{g} \rangle = \min$$

La méthode du § 2 peut se généraliser à cette situation: il suffit de remplacer le produit scalaire usuel par le produit scalaire pondéré. La solution est la projection orthogonale $\vec{g}$ de $\vec{y}$ sur *G*.

<u>4-ème étape: réduction à un système d'équations normales</u>

La projection $\vec{g}$ est déterminée par les conditions suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{g} = a\,\vec{g_1} + b\,\vec{g_2} \\ \vec{e} = \vec{y} - \vec{g} = \vec{y} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} \\ \langle \vec{e} \mid \vec{g_1} \rangle = 0 \,;\ \langle \vec{e} \mid \vec{g_2} \rangle = 0 \end{array}}$$

On obtient ainsi les équations normales

$$\langle \vec{y} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} \mid \vec{g_1} \rangle = 0; \quad \langle \vec{y} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} \mid \vec{g_2} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{y} \mid \vec{g_1} \rangle - a \langle \vec{g_1} \mid \vec{g_1} \rangle - b \langle \vec{g_2} \mid \vec{g_1} \rangle = 0\,;$$
$$\langle \vec{y} \mid \vec{g_2} \rangle - a \langle \vec{g_1} \mid \vec{g_2} \rangle - b \langle \vec{g_2} \mid \vec{g_2} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{g_1} \mid \vec{g_1} \rangle a + \langle \vec{g_2} \mid \vec{g_1} \rangle b = \langle \vec{y} \mid \vec{g_1} \rangle \ ; \quad \langle \vec{g_1} \mid \vec{g_2} \rangle a + \langle \vec{g_2} \mid \vec{g_2} \rangle b = \langle \vec{y} \mid \vec{g_2} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{g_1} \mid \vec{g_1} \rangle & \langle \vec{g_2} \mid \vec{g_1} \rangle \\ \langle \vec{g_1} \mid \vec{g_2} \rangle & \langle \vec{g_2} \mid \vec{g_2} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{y} \mid \vec{g_1} \rangle \\ \langle \vec{y} \mid \vec{g_2} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i & \sum_{i=1}^{n} c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i\, y_i \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i \end{pmatrix}$$

<u>5-ème étape: résolution des équations normales</u>

Numériquement,

```
x = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
y = {100, 103, 107, 109, 111, 114, 117, 121};
c = {0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05};
g1 = x; g2 = Table[1, {Length[x]}];
                 table      longueur
ps[u_List, v_List] := (c * u).v;
m = (ps[g1, g1]  ps[g1, g2]
     ps[g2, g1]  ps[g2, g2])
```

```
{{15.5, 3.5}, {3.5, 1.}}
```

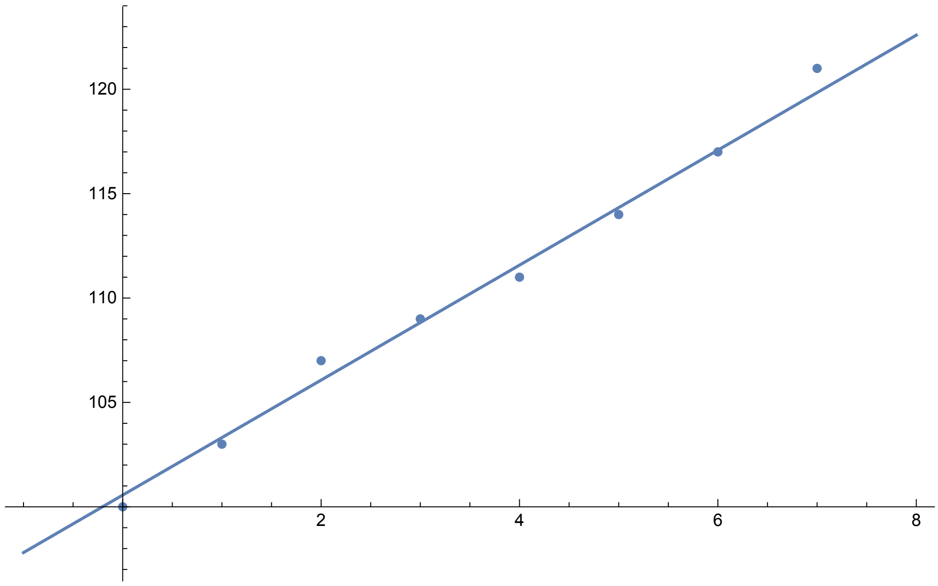
```
v = {ps[y, g1], ps[y, g2]}
```

```
{394.65, 110.2}
```

```
{a, b} = LinearSolve[m, v]
         résous équation linéaire
```

```
{2.75385, 100.562}
```

```
Show[Plot[a t + b, {t, -1, 8}],
mon·· tracé de courbes
 ListPlot[Transpose[{x, y}], PlotStyle → PointSize[0.01`]], AxesOrigin → {0, 100}]
 tracé de li··· transposée        style de tracé  taille des points    origine des axes
```



Géométriquement, l'effet des coefficients (ou poids) est le suivant:

La droite est telle que les résidus sont assez faibles là où les coefficients sont grands (par exemple en $x = 4$);

("faible" signifie ici que les résidus du problème non pondéré pourraient être plus importants).

Par contre, on tolère des résidus plus grands là où les poids sont faibles (par exemple en $x = 7$).

```
Needs["Tableaux`",
nécessite
 "https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/packages/Tableaux.m"]
```

```
afficheTableau[None, {"x", "y", "a x + b", "e = y-(a x+b)", "c"},
                aucun
 Transpose[{x, y, a x + b, y - (a x + b), c}]]
 transposée
```

x	*y*	*a x + b*	*e = y-(a x+b)*	*c*
0	100	100.562	-0.561538	0.05
1	103	103.315	-0.315385	0.1
2	107	106.069	0.930769	0.15
3	109	108.823	0.176923	0.2
4	111	111.577	-0.576923	0.2
5	114	114.331	-0.330769	0.15
6	117	117.085	-0.0846154	0.1
7	121	119.838	1.16154	0.05

Corrigé du problème 3.3 - 1 a)

1-ère étape: énoncé du problème d'ajustement

Ajuster le plan $z = a\,x + b\,y + c$ aux données.

2-ème étape: réduction à un problème de moindres carrés

Les écarts suivants sont appelés "*résidus*"

$$e_1 = z_1 - (a\,x_1 + b\,y_1 + c),\quad e_2 = z_2 - (a\,x_2 + b\,y_2 + c),\quad \ldots,\ e_n = z_n - (a\,x_n + b\,y_n + c)$$

"*Ajuster la droite au sens des moindres carrés*" signifie qu'il faut déterminer *a, b, c* de manière que la somme des carrés des résidus soit minimale

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = \min$$

3-ème étape: réduction à un problème de projection

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = (z_1 - a\,x_1 - b\,y_1 - c)^2 + (z_2 - a\,x_2 - b\,y_2 - c)^2 + \ldots + (z_n - a\,x_n - b\,y_n - c)^2 =$$

$$\left(\left\| \begin{pmatrix} z_1 - a\,x_1 - b\,y_1 - c \\ z_2 - a\,x_2 - b\,y_2 - c \\ \ldots \\ z_n - a\,x_n - b\,y_n - c \end{pmatrix} \right\| \right)^2 = \left(\left\| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \right)^2$$

Autrement dit, dans $\mathbb{R}^n$, on donne le vecteur

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix}$$

et le sous-espace G, engendré par les vecteurs

$$\vec{g_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \vec{g_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},\quad \vec{g_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dont les éléments sont } \quad \vec{g} = a\,\vec{g_1} + b\,\vec{g_2} + c\,\vec{g_3}$$

Déterminez les nombres *a, b, c* tels que

$$\left(\| \vec{y} - \vec{g} \| \right)^2 = \min$$

Nous avons étudié, dans le § 2, que la solution est la projection orthogonale $\vec{g}$ de $\vec{z}$ sur *G*.

4-ème étape: réduction à un système d'équations normales

La projection $\vec{g}$ est déterminée par les conditions suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{g} = a\,\vec{g_1} + b\,\vec{g_2} + c\,\vec{g_3} \\ \vec{e} = \vec{z} - \vec{g} = \vec{z} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3} \\ \vec{e}\,.\vec{g_1} = 0;\ \vec{e}\,.\vec{g_2} = 0\,; \\ \vec{e}\,.\vec{g_3} = 0 \end{array}}$$

On obtient ainsi les équations normales

$$\left(\vec{z} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}\right).\vec{g_1} = 0\,;$$
$$\left(\vec{z} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}\right).\vec{g_2} = 0\,;$$
$$\left(\vec{z} - a\,\vec{g_1} - b\,\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}\right).\vec{g_3} = 0$$

$$\vec{z}.\vec{g_1} - a\,\vec{g_1}.\vec{g_1} - b\,\vec{g_2}.\vec{g_1} - c\,\vec{g_3}.\vec{g_1} = 0;$$
$$\vec{z}.\vec{g_2} - a\,\vec{g_1}.\vec{g_2} - b\,\vec{g_2}.\vec{g_2} - c\,\vec{g_3}.\vec{g_2} = 0;\quad \vec{z}.\vec{g_3} - a\,\vec{g_1}.\vec{g_3} - b\,\vec{g_2}.\vec{g_3} - c\,\vec{g_3}.\vec{g_3} = 0$$

$$\vec{g_1}.\vec{g_1}\,a + \vec{g_2}.\vec{g_1}\,b + \vec{g_3}.\vec{g_1}\,c = \vec{z}.\vec{g_1};$$

$$\vec{g_1}.\vec{g_2}\,a + \vec{g_2}.\vec{g_2}\,b + \vec{g_3}.\vec{g_2}\,c = \vec{z}.\vec{g_2};$$
$$\vec{g_1}.\vec{g_3}\,a + \vec{g_2}.\vec{g_3}\,b + \vec{g_3}.\vec{g_3}\,c = \vec{z}.\vec{g_3}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{g_1}.\vec{g_1} & \vec{g_2}.\vec{g_1} & \vec{g_3}.\vec{g_1} \\ \vec{g_1}.\vec{g_2} & \vec{g_2}.\vec{g_2} & \vec{g_3}.\vec{g_2} \\ \vec{g_1}.\vec{g_3} & \vec{g_2}.\vec{g_3} & \vec{g_3}.\vec{g_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{z}.\vec{g_1} \\ \vec{z}.\vec{g_2} \\ \vec{z}.\vec{g_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ \sum_{i=1}^n z_i \end{pmatrix}$$

<u>5-ème étape: résolution des équations normales</u>

Numériquement,

```
x = {8, 10, 6, 11, 8, 7, 10, 9, 10, 6, 12, 9};
y = {57, 59, 49, 62, 51, 50, 55, 48, 52, 42, 61, 57};
z = {64, 71, 53, 67, 55, 58, 77, 57, 56, 51, 76, 68};
g1 = x; g2 = y; g3 = Table[1, {Length[x]}];
                    table        longueur
```

```
m = {{g1.g1, g2.g1, g3.g1}, {g1.g2, g2.g2, g3.g2}, {g1.g3, g2.g3, g3.g3}}
```

{{976, 5779, 106}, {5779, 34843, 643}, {106, 643, 12}}

```
v = {z.g1, z.g2, z.g3}
```

{6796, 40830, 753}

```
{a, b, c} = LinearSolve[m, v]
            résous équation linéaire
```

$$\left\{\frac{5947}{3948}, \frac{241}{282}, \frac{4805}{1316}\right\}$$

```
N[{a, b, c}]
valeur numérique
```

{1.50633, 0.85461, 3.65122}

Corrigé du problème 3.3 - 1 b)

```
x = {8, 10, 6, 11, 8, 7, 10, 9, 10, 6, 12, 9};
y = {57, 59, 49, 62, 51, 50, 55, 48, 52, 42, 61, 57};
z = {64, 71, 53, 67, 55, 58, 77, 57, 56, 51, 76, 68};
```

Pour l'usage de la fonction Fit, on consultera l'aide (Help).

```
donnees = Transpose[{x, y, z}];
          transposée
```

```
Fit[donnees, {s, t, 1}, {s, t}]
ajuste
```

3.65122 + 1.50633 s + 0.85461 t

Corrigé de l'exercice 3.4 - 1

Ajustez les paramètres de la fonction

$$f(x) = c_0 + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

aux données

```
y = {-1, -2, 3, 5, 8, 12, 15, 14, 10, 8, 5, 0}
```

$\{-1, -2, 3, 5, 8, 12, 15, 14, 10, 8, 5, 0\}$

```
n = Length[y]
```

longueur

12

Calculs:

```
T = 12; ω = 2π/T;
```

```
t = Table[j T/n, {j, 0, n - 1}]
```

table

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

```
g[0] = Table[1, {n}]
```

table

$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

```
g[1] = Cos[ω t ]
```

cosinus

$$\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

```
g[2] = Sin[ω t]
```

sinus

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

```
k = 3
```

3

```
c = Table[y.g[j] / (g[j].g[j]), {j, 0, k - 1}]
```

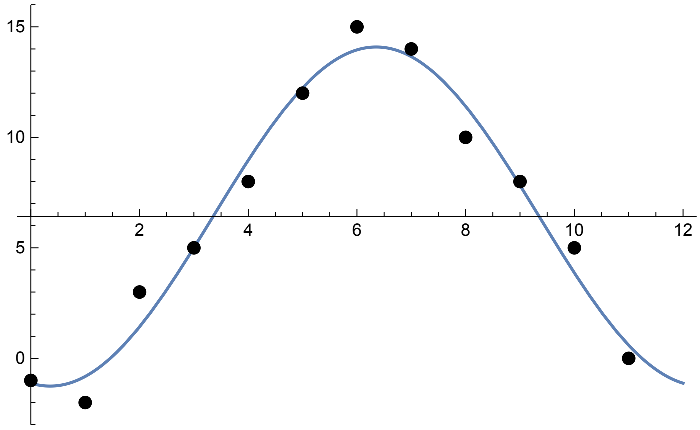
table

$$\left\{\frac{77}{12}, \frac{1}{6}\left(-21 - 14\sqrt{3}\right), \frac{1}{6}\left(-5 - 2\sqrt{3}\right)\right\}$$

```
f[x_] := c.{1, Cos[ ω x], Sin[ω x]}
```

cosinus sinus

```
Plot[f[x], {x, 0, T}, AxesOrigin → {0, c⟦1⟧},
tracé de courbes          origine des axes
  Epilog → {PointSize[0.02`], Point /@ Transpose[{t, y}]},
  épilogue   taille des points   point    transposée
  PlotRange → {Min[y] - 1, Max[y] + 1}]
  zone de tracé  minimum    maximum
```



Les coefficients de Fourier sont

```
N[c]
valeur numérique
```

$\{6.41667, -7.54145, -1.41068\}$

Avec *Mathematica*, il est encore possible d'obtenir le résultat au moyen de la méthode **Fit[..]**

```
Clear[x];
efface
Fit[Transpose[{t, y}], {1, Cos[ω x], Sin[ω x]}, x]
aju·· transposée         cosinus    sinus
```

$6.41667 - 7.54145\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi x}{6}\right] - 1.41068\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{6}\right]$

Corrigé du travail dirigé 3.4 - 5 a)

```
x = Range[0, 360, 365/12]
    plage
```

$\left\{0, \frac{365}{12}, \frac{365}{6}, \frac{365}{4}, \frac{365}{3}, \frac{1825}{12}, \frac{365}{2}, \frac{2555}{12}, \frac{730}{3}, \frac{1095}{4}, \frac{1825}{6}, \frac{4015}{12}\right\}$

```
y = {-1, 1, 4, 8, 12, 15, 18, 17, 14, 9, 4, 1}
```

$\{-1, 1, 4, 8, 12, 15, 18, 17, 14, 9, 4, 1\}$

```
T = 365; ω = 2π/T;
f[t_] := a + b Cos[ω t] + c Sin[ω t];
                cosinus      sinus
```

Le problème des moindres carrés consiste à déterminer le minimum de la somme des carrés des résidus

$$(y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \ldots + (y_{12} - f(x_{12}))^2$$

c'est-à-dire le minimum de la norme du vecteur écart

$$\vec{e} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \cdots \\ y_{12} - f(x_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{12} \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} \cos(\omega x_1) \\ \cos(\omega x_2) \\ \cdots \\ \cos(\omega x_{12}) \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} \sin(\omega x_1) \\ \sin(\omega x_2) \\ \cdots \\ \sin(\omega x_{12}) \end{pmatrix} = \vec{y} - a\,\overrightarrow{g_0} - b\,\overrightarrow{g_1} - c\,\overrightarrow{g_2}$$

où l'on a posé

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{12} \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{g_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega x_1) \\ \cos(\omega x_2) \\ \cdots \\ \cos(\omega x_{12}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} \sin(\omega x_1) \\ \sin(\omega x_2) \\ \cdots \\ \sin(\omega x_{12}) \end{pmatrix}.$$

```
g0 = Table[1, {12}]
```
table

$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

```
g1 = Table[Cos[ω x[[i]]], {i, 1, 12}]
```
table cosinus

$$\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

```
g2 = Table[Sin[ω x[[i]]], {i, 1, 12}]
```
table sinus

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

Le minimum est atteint lorsque le vecteur écart est orthogonal à chaque vecteur de la base du sous-espace sur lequel on projette:

$$\vec{e}.\overrightarrow{g_0} = 0,\ \vec{e}.\overrightarrow{g_1} = 0,\ \vec{e}.\overrightarrow{g_2} = 0$$

$$\left(\vec{y} - a\,\overrightarrow{g_0} - b\,\overrightarrow{g_1} - c\,\overrightarrow{g_2}\right).\overrightarrow{g_0} = 0,\ \left(\vec{y} - a\,\overrightarrow{g_0} - b\,\overrightarrow{g_1} - c\,\overrightarrow{g_2}\right).\overrightarrow{g_1} = 0,\ \left(\vec{y} - a\,\overrightarrow{g_0} - b\,\overrightarrow{g_1} - c\,\overrightarrow{g_2}\right).\overrightarrow{g_2} = 0$$

$$\begin{aligned} a\,\overrightarrow{g_0}.\overrightarrow{g_0} + b\,\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_0} + c\,\overrightarrow{g_2}.\overrightarrow{g_0} &= \vec{y}.\overrightarrow{g_0} \\ a\,\overrightarrow{g_0}.\overrightarrow{g_1} + b\,\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1} + c\,\overrightarrow{g_2}.\overrightarrow{g_1} &= \vec{y}.\overrightarrow{g_1} \\ a\,\overrightarrow{g_0}.\overrightarrow{g_2} + b\,\overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_2} + c\,\overrightarrow{g_2}.\overrightarrow{g_2} &= \vec{y}.\overrightarrow{g_2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{g_0}.\overrightarrow{g_0} & \overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_0} & \overrightarrow{g_2}.\overrightarrow{g_0} \\ \overrightarrow{g_0}.\overrightarrow{g_1} & \overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_1} & \overrightarrow{g_2}.\overrightarrow{g_1} \\ \overrightarrow{g_0}.\overrightarrow{g_2} & \overrightarrow{g_1}.\overrightarrow{g_2} & \overrightarrow{g_2}.\overrightarrow{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}.\overrightarrow{g_0} \\ \vec{y}.\overrightarrow{g_1} \\ \vec{y}.\overrightarrow{g_2} \end{pmatrix}$$

```
m = {{g0.g0, g0.g1, g0.g2}, {g1.g0, g1.g1, g1.g2}, {g2.g0, g2.g1, g2.g2}};
MatrixForm[m]
```
apparence matricielle

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

```
v = {y.g0, y.g1, y.g2}
```

$\{102, -28 - 15\sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$

```
{a, b, c} = LinearSolve[m, v]
```
résous équation linéaire

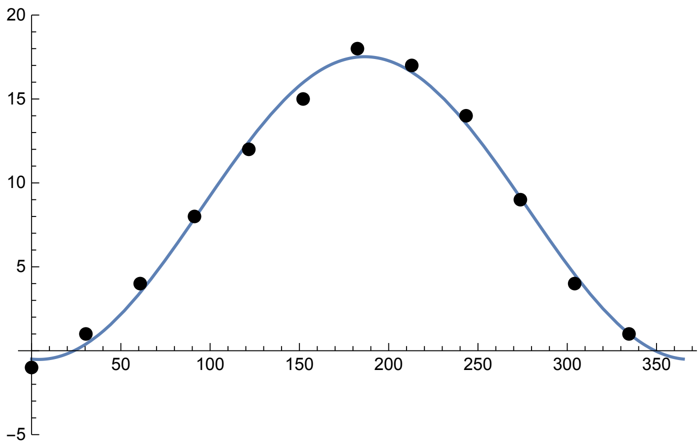
$$\left\{\frac{17}{2},\ \frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\right\}$$

```
f[t]
```

$$\left\{\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right),\ \frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{365}\right],\right.$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{4\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{4\pi}{365}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{6\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{6\pi}{365}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{8\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{8\pi}{365}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{73}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{73}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{12\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{12\pi}{365}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{14\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{14\pi}{365}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{16\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{16\pi}{365}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{18\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{18\pi}{365}\right],$$
$$\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{4\pi}{73}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{4\pi}{73}\right],$$
$$\left.\frac{17}{2}+\frac{1}{6}\left(-28-15\sqrt{3}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{22\pi}{365}\right]+\frac{1}{6}\left(-2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{22\pi}{365}\right]\right\}$$

```
Plot[f[t], {t, 0, T},
 Epilog → {PointSize[0.02`], Point /@ Transpose[{x, y}]}, PlotRange → {-5, 20}]
```
tracé de courbes

épilogue · taille des points · point · transposée · zone de tracé



Pour la correspondance avec le calendrier, on se réfère au tableau donné dans l'énoncé; par exemple la température journalière moyenne au 17 octobre est, en degrés Celsius,

```
N[f[274]]
```
valeur numérique

9.08328

Corrigé du travail dirigé 3.4 - 5 b)

$d = N\left[\sqrt{b^2 + c^2}\right]$

valeur numérique

9.01827

```
N[c]
```
valeur numérique

-0.622008

c est négatif

$\varphi = (-1)\,\text{ArcCos}\left[\frac{b}{d}\right]$

arc cosinus

-3.07257

Redéfinissons la fonction f

```
Clear[f]; f[t_] := a + d Cos[ω t - φ]; f[t]
```
efface cosinus

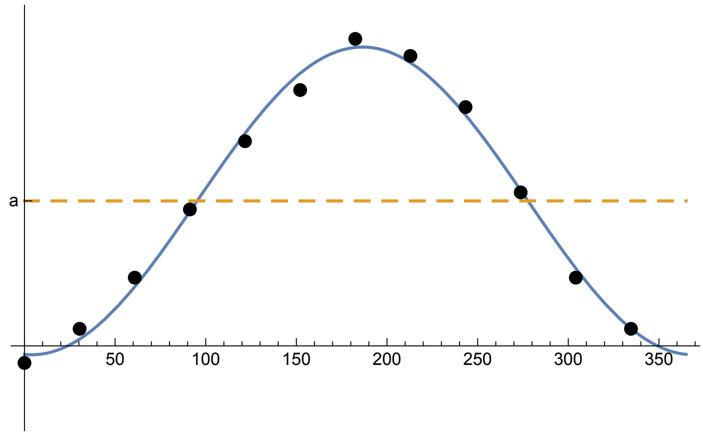
{-0.496794, -0.506168, -0.512873, -0.516907, -0.51827, -0.51696, -0.512978, -0.506326, -0.497005, -0.485017, -0.470368, -0.45306}

Il s'agit de la même fonction f que dans la partie a) mais récrite sous une autre forme.

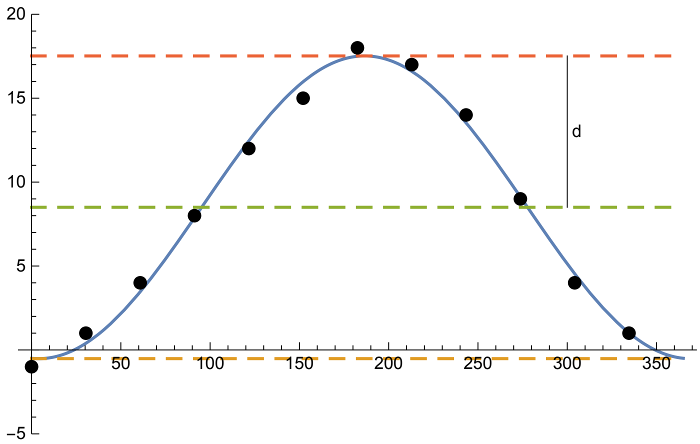
Corrigé du travail dirigé 3.4 - 5 c)

a est la température annuelle moyenne: sur le graphique, il s'agit d'une droite horizontale située à mi-hauteur

```
Plot[{f[t], a}, {t, 0, T}, Epilog → {PointSize[0.02`], Point /@ Transpose[{x, y}]},
 PlotRange → {-5, 20}, Ticks → {Automatic, {{a, "a"}}},
 PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.02`}]}]
```
tracé de courbes, épilogue, taille des points, point, transposée, zone de tracé, graduati…, automatique, style de tracé, style de rayures, style de rayures



d est l'amplitude thermique annuelle (la moitié de l'écart entre les températures extrêmes):

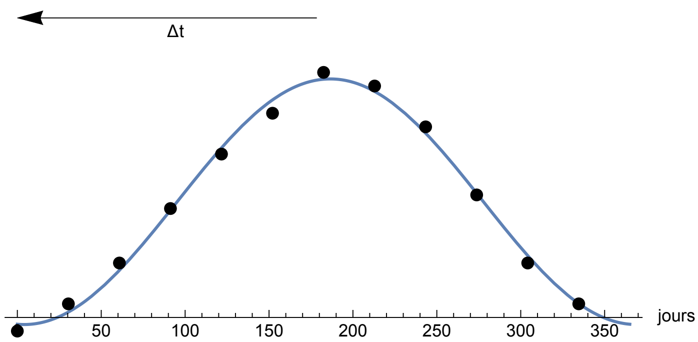


Le décalage temporel

$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega}$

-178.49

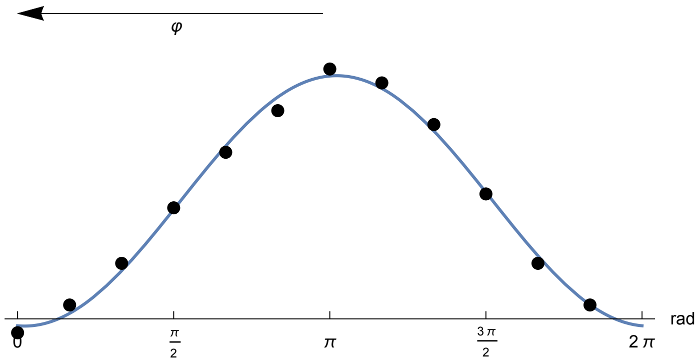
indique le nombre de jours de décalage entre le maximum de la fonction $f(t)$ et le maximum le la fonction $\cos(\omega t)$



Le déphasage

φ

indique le décalage en radians entre le maximum de la fonction $f(t)$ et le maximum le la fonction $\cos(\omega t)$


φ
rad
0
π/2
π
3π/2
2π