# Diagonalisation des matrices réelles symétriques 2×2

## Théorème spectral

Soit G une matrice réelle symétrique 2×2.
Alors il existe une rotation de matrice R telle que

$$R^{-1}\,G\,R = D$$

soit diagonale, et dont les coefficients sont réels.
De plus, les termes diagonaux de D sont valeurs propres de G et les colonnes de R sont vecteurs propres de G.

## Démonstration du théorème spectral et calcul des vecteurs propres

Les coefficients de la matrices réelle symétrique G sont

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix}$$

- **Cas où $g_2 = 0$**

Si la matrice G est diagonale

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_3 \end{pmatrix}$$

on peut choisir D=G et R=I où I désigne la matrice identité.

- **Cas où $g_2 \neq 0$**

Considérons maintenant la famille de matrices R dépendant d'un paramètre réel m

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & \frac{-m}{\sqrt{1+m^2}} \\ \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \end{pmatrix}$$

I désignant la matrice identité, on vérifie aisément que

$$R^{tr}\,R = I \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Det}(R) = 1$$

ce qui prouve que R est une rotation et que

$$R^{-1} = R^{tr}$$

On peut remarquer que la famille considérée ici n'embrasse pas toutes les rotations, par exemple nous n'utiliserons pas la rotation $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'expression

$$R^{-1}\,G\,R = R^{tr}\,G\,R = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1+m^2} =$$

$$\begin{pmatrix} g_1 + 2\,g_2\,m + g_3\,m^2 & g_2 - g_1\,m + g_3\,m - g_2\,m^2 \\ g_2 - g_1\,m + g_3\,m - g_2\,m^2 & g_3 - 2\,g_2\,m + g_1\,m^2 \end{pmatrix} \frac{1}{1+m^2}$$

est diagonale si et seulement si

$$g_2 - g_1 m + g_3 m - g_2 m^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du deuxième degré en m

$$\triangle = (-g_1 + g_3)^2 - 4(-g_2)\, g_2 = (g_3 - g_1)^2 + 4 g_2^2$$

étant strictement positif, l'équation possède deux solutions réelles distinctes. Il nous suffit de faire usage d'une solution

$$m_1 = \frac{-(-g_1 + g_3) - \sqrt{\triangle}}{2(-g_2)} = \frac{-g_1 + g_3 + \sqrt{(g_3 - g_1)^2 + 4 g_2^2}}{2 g_2}$$

En substituant cette valeur dans la matrice R, l'expression $R^{-1}\, G\, R$ est diagonale, ce que nous notons

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- **Valeurs propres et vecteurs propres**

Notations:

La matrice de l'identité a pour vecteurs colonnes $I = \left(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\right)$ qui constitue la base canonique.

La matrice de la rotation a pour vecteurs colonnes $R = \left(\vec{r}_1,\ \vec{r}_2\right)$. On a les relations

$$R\left(\vec{e}_1\right) = \vec{r}_1,\quad R\left(\vec{e}_2\right) = \vec{r}_2,\quad R^{-1}\left(\vec{r}_1\right) = \vec{e}_1,\quad R^{-1}\left(\vec{r}_2\right) = \vec{e}_2,\ D\left(\vec{e}_1\right) = \lambda_1\, \vec{e}_1,\quad D\left(\vec{e}_2\right) = \lambda_2\, \vec{e}_2$$

$$G = R\, D\, R^{-1}$$

Par suite,

$$G\left(\vec{r}_1\right) = R\, D\, R^{-1}\left(\vec{r}_1\right) = R\, D\left(\vec{e}_1\right) = R\left(\lambda_1\, \vec{e}_1\right) = \lambda_1\, R\left(\vec{e}_1\right) = \lambda_1\, \vec{r}_1$$
$$G\left(\vec{r}_2\right) = R\, D\, R^{-1}\left(\vec{r}_2\right) = R\, D\left(\vec{e}_2\right) = R\left(\lambda_2\, \vec{e}_2\right) = \lambda_2\, R\left(\vec{e}_2\right) = \lambda_2\, \vec{r}_2$$

La colonne $\vec{r}_1$ est un vecteur propre de G et le terme diagonal $\lambda_1$ est sa valeur propre associée.

La colonne $\vec{r}_2$ est un vecteur propre de G et le terme diagonal $\lambda_2$ est sa valeur propre associée.

Les vecteurs propres de G sont

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + m_1^2}}, \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -m_1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + m_1^2}}$$

# Calcul des valeurs propres

La démonstration du théorème spectral nous a fourni une première méthode de calcul des valeurs propres de G

$$\lambda_1 = \frac{g_1 + 2 g_2 m_1 + g_3 m_1^2}{1 + m_1^2} = \frac{1}{2}\left(g_1 + g_3 + \sqrt{(g_3 - g_1)^2 + 4 g_2^2}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{g_3 - 2 g_2 m_1 + g_1 m_1^2}{1 + m_1^2} = \frac{1}{2}\left(g_1 + g_3 - \sqrt{(g_3 - g_1)^2 + 4 g_2^2}\right)$$

Dans le cas où on ne s'intéresse qu'aux valeurs propres, le calcul précédent peut être avantageusement remplacé par la méthode suivante qui est plus directe et nécessite moins de calculs.

$$G(r) = \lambda\, r \quad ==> \quad (G - \lambda I)\, r = 0 \quad \text{où } r \neq 0$$

$$==> \quad \mathrm{Det}\,(G - \lambda I) = 0 \quad ==> \quad \mathrm{Det}\begin{pmatrix} g_1 - \lambda & g_2 \\ g_2 & g_3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-g_2^2 + g_1 g_3 - g_1 \lambda - g_3 \lambda + \lambda^2 = 0$$

dont les solutions sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(g_1 + g_3 + \sqrt{(g_3 - g_1)^2 + 4 g_2^2}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(g_1 + g_3 - \sqrt{(g_3 - g_1)^2 + 4 g_2^2}\right)$$

Attention: si les valeurs propres et les vecteurs propres ont été calculés avec des méthodes indépendantes, il faut encore veiller à l'ordre: $\lambda_1$ doit correspondre à $\vec{r}_1$ et $\lambda_2$ à $\vec{r}_2$.

## Exemple numérique

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{53}{25} & \frac{96}{25} \\ \frac{96}{25} & -\frac{3}{25} \end{pmatrix}$$

$$m_1 = \frac{-g_1 + g_3 + \sqrt{(g_3 - g_1)^2 + 4 g_2^2}}{2 g_2} = \frac{3}{4}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -m_1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{g_1 + 2 g_2 m_1 + g_3 m_1^2}{1 + m_1^2} = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{g_3 - 2 g_2 m_1 + g_1 m_1^2}{1 + m_1^2} = -3$$

## Application: réduction d'une forme quadratique

Une forme quadratique est une expression de la forme suivante dans laquelle le point représente la multiplication matricielle et *tr* signifie *transposée*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{tr} . \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g_1 x^2 + 2 g_2 x y + g_3 y^2$$

Considérons l'exemple suivant: dans l'expression

$$\frac{53 x^2}{25} + \frac{192 x y}{25} - \frac{3 y^2}{25}$$

quel changement de variables (x, y) → (u, v) faut-il effectuer afin que l'expression se simplifie en ($a\, u^2 + b\, v^2$), c'est-à-dire afin que le terme (u v) disparaisse? Pour ce faire, remarquons qu'il s'agit de la forme quadratique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{tr} . \begin{pmatrix} \frac{53}{25} & \frac{96}{25} \\ \frac{96}{25} & -\frac{3}{25} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{53 x^2}{25} + \frac{192 x y}{25} - \frac{3 y^2}{25}$$

La matrice G étant celle de l'exemple numérique précédent, on peut la récrire comme suit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{tr} . G . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{tr} . R . D . R^{tr} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{53\,x^2}{25} + \frac{192\,x\,y}{25} - \frac{3\,y^2}{25} \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(R^{tr} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^{tr} . D . \left(R^{tr} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{53\,x^2}{25} + \frac{192\,x\,y}{25} - \frac{3\,y^2}{25}$$

Le changement de variable à utiliser est donc

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R^{tr} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui peut être réalisé comme suit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\,u}{5} - \frac{3\,v}{5} \\ \frac{3\,u}{5} + \frac{4\,v}{5} \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\frac{53\,x^2}{25} + \frac{192\,x\,y}{25} - \frac{3\,y^2}{25} =$$

$$\frac{53\left(\frac{4\,u}{5} - \frac{3\,v}{5}\right)^2}{25} + \frac{192\left(\frac{4\,u}{5} - \frac{3\,v}{5}\right)\left(\frac{3\,u}{5} + \frac{4\,v}{5}\right)}{25} - \frac{3\left(\frac{3\,u}{5} + \frac{4\,v}{5}\right)^2}{25} = 5\,u^2 - 3\,v^2$$

## Liens hypertextes

- **calcul en ligne: diagonalisation d'une matrice et réduction d'une forme quadratique**

http://www.deleze.name/marcel/sec2/AL/diagonalisation/index.html

- **vers la page mère: Mathématiques, niveau secondaire II**

http://www.deleze.name/marcel/sec2/index.html