A quelle vitesse courir sous la pluie ?

■ Introduction

Une distance donnée *d* devant être franchie sous la pluie, à quelle vitesse se déplacer de manière que la quantité d'eau reçue soit minimale ?
Faut-il, dans tous les cas, courir le plus vite possible ?

■ Hypothèses à tester

Si la pluie est assez verticale, ou s'il pleut de face, l'être humain à intérêt à courir le plus vite possible. Par contre, s'il reçoit une pluie fortement oblique dans le dos, le piéton a intérêt à "accompagner la pluie", c'est-à-dire à avancer à la même vitesse que la composante horizontale que la pluie.

En effet, lorsque la vitesse relative est faible, la pluie mouille peu la face avant ou arrière du promeneur. Par contre, lorsque la vitesse relative est élevée, la face avant ramasse beaucoup d'eau. En d'autres termes, la surface exposée dépend de l'angle d'incidence. Etudions plus précisément les cas dans lesquels il faut, non pas courir le plus vite possible, mais adopter une vitesse optimale.

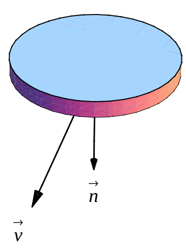
Une modélisation

■ Débit de la pluie à travers une surface

Pendant la durée Δt, la masse de liquide Δm qui traverse la surface S est égale à

$$\Delta m = \rho \, \Delta V = \rho \, S \, \Delta h = \rho \, S \, v_n \, \Delta t$$

où ρ exprime, en $[\frac{kg}{m^3}]$, le nombre de kg d'eau par mètre cube d'atmosphère;
ΔV désigne le volume de liquide qui traverse S;
S est l'aire de la surface $[m^2]$;
Δh désigne la hauteur de ce volume, mesurée perpendiculairement à la surface;
$\Delta h = v_n \, \Delta t$ où v_n désigne la composante de la vitesse de la pluie qui est normale à la surface, en $[\frac{m}{s}]$.



Le débit massique D, en $[\frac{kg}{s}]$, à travers la surface S est donc

$$D = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \, S \, v_n$$

Calcul de la composante normale de la vitesse

S étant la surface d'un corps, orientons le vecteur normal vers l'intérieur. Ainsi, le scalaire v_n est positif.

Si $\vec{n}$ désigne le vecteur normal unitaire à la surface,

$$v_n = \vec{v}.\vec{n}$$

$$D = \rho S v_n = \rho S \vec{v}.\vec{n}$$

Si $\vec{n}$ désigne un vecteur normal pas nécessairement unitaire,

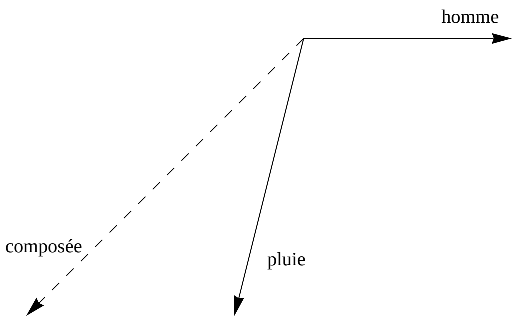
$$v_n = \vec{v}.\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$D = \rho S v_n = \rho S \frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Cette dernière formule présente l'avantage de n'avoir pas à orienter le vecteur $\vec{n}$.

■ Vitesse relative et composition des vitesses

Nous tenons compte de la station verticale de l'homme, de sa vitesse de déplacement horizontal et de la vitesse de la pluie qui est généralement oblique, ce qui nous conduit à un modèle à trois dimensions. Pour calculer le débit de la pluie, en vertu de la relativité des mouvements, nous pouvons composer les vitesses de l'homme et de la pluie. Nous tiendrons compte plus tard que la vitesse de l'homme influence la durée de l'exposition à la pluie.

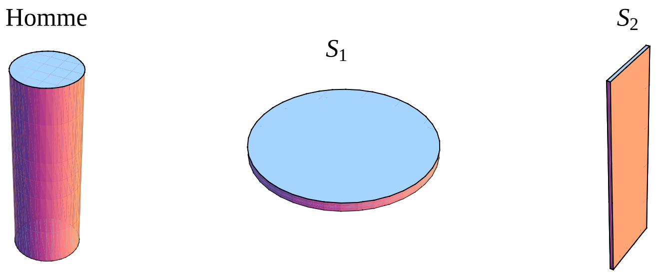


V = vitesse de l' homme;
v_1 = vitesse de la pluie, composante horizontale dans le sens de la marche;
v_2 = vitesse de la pluie,
composante latérale (horizontale perpendiculaire au sens de la marche);
v_3 = vitesse de la pluie, composante verticale;
$\vec{v}$ = vitesse qui résulte de la composition des vitesses de l' homme et de la pluie.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - V \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

■ Débit de la pluie sur un être humain

L'être humain, symbolisé ici par un cylindre, expose deux surfaces à la pluie. Pour calculer la pluie reçue, nous n'utilisons pas la surface effective des vêtements, mais deux sections: la section horizontale nommée S_1, et la section verticale nommée S_2.
Les formes des surfaces S_1 et S_2 sont quelconques; dans la figure, $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = 2 R H$; le rapport des deux aires est $r = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R}{2 H}$.



Débit de la pluie sur la section horizontale:

$$D_1 = \rho S_1 \vec{v}.\vec{n_1} = \rho S_1 \begin{pmatrix} v_1 - V \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\rho S_1 v_3$$

où S_1 désigne la section horizontale d'un homme, à la hauteur des épaules;
la composante verticale de la pluie v_3 est négative, ce qui fait que D_1 est positif.

Débit de la pluie sur la section verticale:

$$D_2 = \rho S_2 \frac{\left| \vec{v}.\vec{n_2} \right|}{\| \vec{n_2} \|} \qquad \text{où} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 - V \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

S_2 désigne la section d'un homme dans un plan vertical;
$\vec{n_2}$ est le vecteur normal unitaire horizontal dans la direction de la composante horizontale de $\vec{v}$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} v_1 - V \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(V - v_1)^2 + v_2^2}}$$

$$D_2 = \rho S_2 \left| \begin{pmatrix} v_1 - V \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 - V \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \frac{1}{\sqrt{(v_1 - V)^2 + v_2^2}} =$$

$$\rho S_2 \frac{(V - v_1)^2 + v_2^2}{\sqrt{(v_1 - V)^2 + v_2^2}} = \rho S_2 \sqrt{(V - v_1)^2 + v_2^2}$$

Le débit total est donc

$$D = D_1 + D_2 = -\rho S_1 v_3 + \rho S_2 \sqrt{(V - v_1)^2 + v_2^2}$$

Quantité de pluie reçue

La quantité de pluie reçue Q est égale au débit D multiplié par la durée de l'exposition. Soit d la distance à parcourir. La durée de l'exposition est alors de $t = \frac{d}{V}$ et

$$Q = D\,t = D\,\frac{d}{V} = \left(-\rho\,S_1\,v_3 + \rho\,S_2\,\sqrt{(V - v_1)^2 + v_2^2}\right)\frac{d}{V}$$

Posons

$$r = \frac{S_1}{S_2}$$

Mettons en évidence

$$Q = \rho\,d\,S_2\left(-r\,v_3 + \sqrt{(V - v_1)^2 + v_2^2}\right)\frac{1}{V}$$

Fonction à étudier

ρ, d et S_2 étant des constantes positives, nous étudions la fonction

$$f(V) = \left(-r\,v_3 + \sqrt{(V - v_1)^2 + v_2^2}\right)\frac{1}{V}$$

sous les hypothèses : $r > 0$, $v_3 < 0$, $V > 0$.

Fonction à étudier, cas sans pluie latérale

Hypothèse: $v_2 = 0$

$$g(V) = \frac{\sqrt{(V - v_1)^2} - r\,v_3}{V} = \frac{|\,V - v_1\,| - r\,v_3}{V}$$

Pour $V < v_1$

$$g(V) = \frac{-V + v_1 - r\,v_3}{V}; \qquad g'(V) = \frac{-v_1 + r\,v_3}{V^2}$$

Pour $V > v_1$

$$g(V) = \frac{V - v_1 - r\,v_3}{V}; \qquad g'(V) = \frac{v_1 + r\,v_3}{V^2}$$

Cas particulier: en cas de pluie de face de faible incidence

Hypothèses : $r > 0$, $v_3 < 0$, $V > 0$ et

$$v_1 \leq 0\,, \qquad v_2 = 0, \qquad -v_1 + r\,v_3 < 0$$

Il s'ensuit que $v_1 + r\,v_3 < 0$.

V	0		∞
Sign(g′(V))	‖	−	0
Var(g(V))	∞	↘	1

Il est avantageux de courir le plus vite possible.

Cas particulier: en cas de pluie de face de forte incidence

Hypothèses : $r > 0$, $v_3 < 0$, $V > 0$ et

$$v_1 < r\,v_3 < 0\,, \qquad v_2 = 0$$

Il s'ensuit que $v_1 + r\,v_3 < 0$ et $V > 0 > v_1$

V	0		∞
Sign(g′(V))	‖	−	0
Var(g(V))	∞	↘	1

Il est avantageux de courir le plus vite possible.

Cas particulier: en cas de pluie de dos de faible incidence

Hypothèses : $r > 0$, $v_3 < 0$, $V > 0$ et

$$0 < v_1 < -r\,v_3, \qquad v_2 = 0$$

Il s'ensuit que $-v_1 + r\,v_3 < 0$ et $v_1 + r\,v_3 < 0$.

V	0		∞
Sign(g′(V))	‖	−	0
Var(g(V))	∞	↘	1

Il est avantageux de courir le plus vite possible.

Cas particulier: en cas de pluie de dos de forte incidence

Hypothèses : $r > 0$, $v_3 < 0$, $V > 0$ et

$$v_1 > -r\,v_3 > 0\,, \qquad v_2 = 0$$

Il s'ensuit que $-v_1 + r\,v_3 < 0$ et $v_1 + r\,v_3 > 0$.

V	0		v_1		∞
Sign(g′(V))	‖	−	‖	+	0
Var(g(V))	∞	↘	$-\frac{r\,v_3}{v_1}$	↗	1

Il s'agit du cas où la pluie arrive dans le dos assez obliquement: $v_1 > -r\,v_3$.

Il est avantageux d'accompagner la pluie: la vitesse de déplacement idéale est égale à la composante horizontale de la pluie. Courir trop vite serait désavantageux.

Cas particulier: en cas de pluie de dos d'incidence critique

Hypothèses : $r > 0$, $v_3 < 0$, $V > 0$ et

$$v_1 = -r\,v_3 > 0, \qquad v_2 = 0$$

Il s'ensuit que $-v_1 + r\,v_3 < 0$ et $v_1 + r\,v_3 = 0$.

Il s'agit du cas où la pluie arrive obliquement dans le dos avec la pente définie par: $v_1 = -r\,v_3$.
Il est avantageux d'accompagner la pluie: la vitesse de déplacement idéale est égale à la composante horizontale de la pluie. Courir plus vite serait indifférent: la quantité de pluie reçue devient indépendante de la vitesse!

V	0		v_1		∞
Sign(g′(V))	‖	−	‖	0	0
Var(g(V))	∞	↘	1	1	1

- **Lien hypertexte vers la page mère: Physique dans la culture générale**

http://www.deleze.name/marcel/physique/