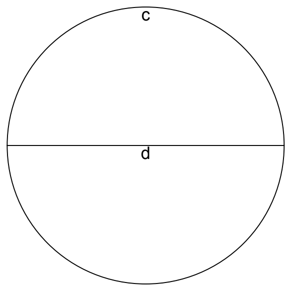
1. Définitions du nombre π

Première définition de π

π est le rapport de la circonférence au diamètre:

$$c = 2\,\pi_1$$
$$r = \pi_1\, d$$



$$\pi_1 = \frac{c}{d} = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

b_n = côté du polygone inscrit à n côtés

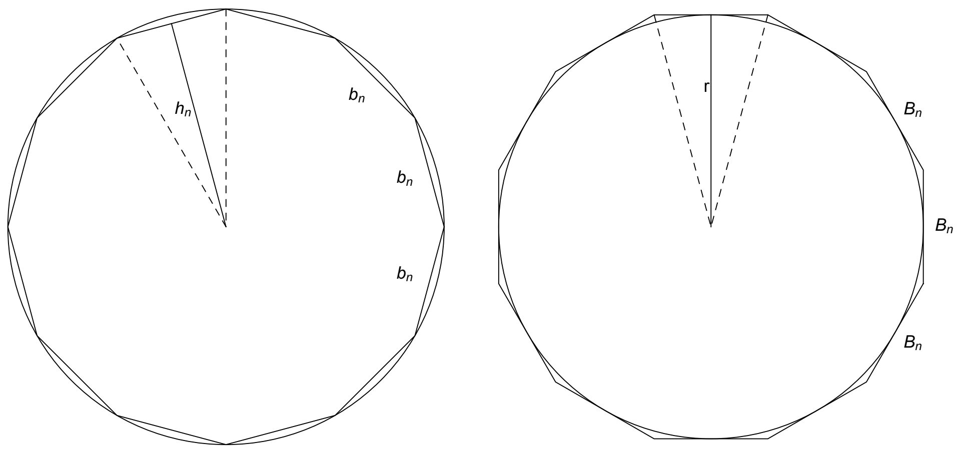
h_n = apothème du polygone inscrit à n côtés

p_n = périmètre du polygone inscrit à n côtés: $p_n = n\, b_n$

B_n = côté du polygone circonscrit à n côtés

P_n = périmètre du polygone circonscrit à n côtés: $P_n = n\, B_n$

Figure pour n = 12



On démontre d'abord les propositions suivantes qui se fondent sur la géométrie élémentaire des polygones réguliers:

$$\lim_{n \to \infty} h_n = r$$

$$\lim_{n \to \infty} (P_n - p_n) = 0$$

La longueur d'arc du cercle est, par définition, la limite de la suite p_n, ce qui définit le nombre π_1

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 2\,\pi_1\, r$$

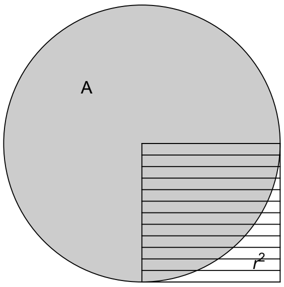
et les suites p_n et P_n ont une limite commune

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 2\,\pi_1\,r = \lim_{n\to\infty} P_n$$

Deuxième définition de π

π est le rapport de l'aire du disque à l'aire du carré dont le coté est le rayon:

$$A = \pi_2\, r^2$$



$$\pi_2 = \frac{A}{r^2} = \frac{\text{aire du disque de rayon r}}{\text{aire du carré de côté r}}$$

Aire des polygones inscrit et circonscrit:

$$a_n = n\,\frac{1}{2}\,b_n\,h_n = \frac{1}{2}\,p_n\,h_n$$

$$A_n = n\,\frac{1}{2}\,B_n\,r = \frac{1}{2}\,P_n\,r$$

Passages à la limite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\,(2\,\pi_1\,r)\,(r) = \pi_1\,r^2$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2}\,(2\,\pi_1\,r)\,r = \pi_1\,r^2$$

L'aire du disque étant encadrée par les aires des polygones inscrit et circonscrit, son aire est

$$\pi_1\,r^2$$

ce qui établit que

$$\pi_2 = \pi_1$$

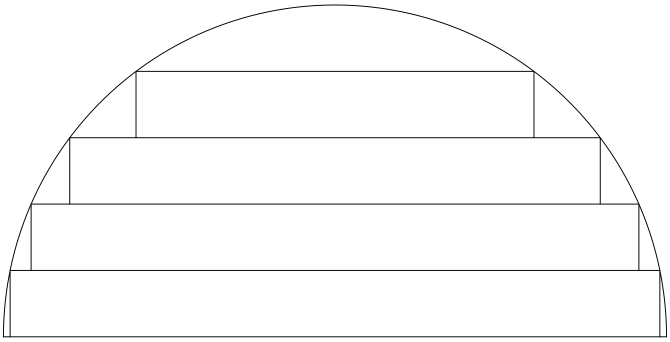
Troisième définition de π

Le volume d'une boule est

$$V = \frac{4}{3}\,\pi_3\,r^3$$

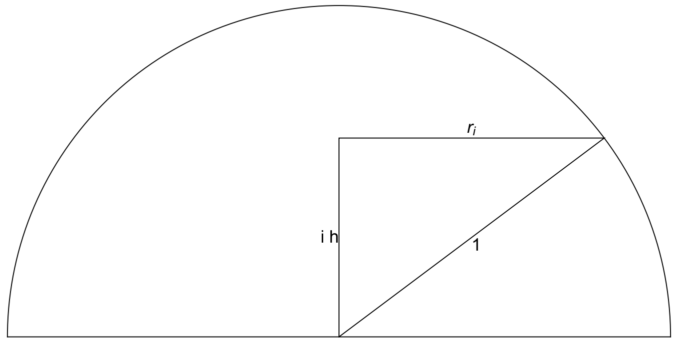
De ce point de vue, le volume d'une boule de rayon 1 est $V_1 = \frac{4}{3}\,\pi_3$. Considérons une demi-boule de rayon 1 et déterminons une approximation par défaut au moyen d'un empilement de n disques de même épaisseur $h = \frac{1}{n}$

Coupe pour n = 5



Le rayon du i-ème cylindre vérifie $r_i^2 + (i\,h)^2 = 1^2$ d'où $r_i = \sqrt{1 - (i\,h)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$

Rayon du i–ème cylindre. Fig. pour i = 3



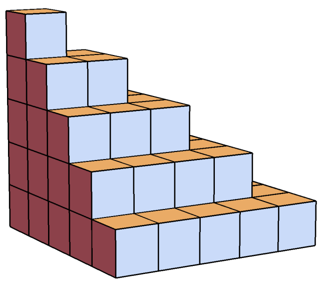
Le volume de l'empilement de cylindres est donc

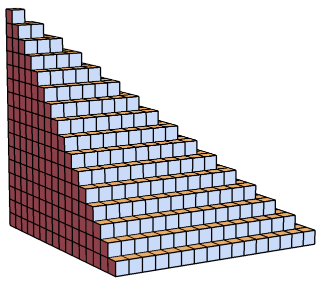
$$\pi\, r_1^2\, h + \pi\, r_2^2\, h + \pi\, r_3^2\, h + \,..\, + \pi\, r_n^2 = \pi\, h \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \,..\, + r_n^2 \right) =$$

$$\pi\, \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + 1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \pi \;- \pi \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \right\}$$

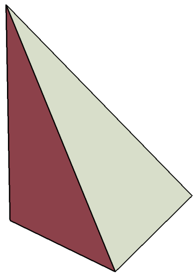
Dans cette expression, la valeur de π est celle qui apparaît dans l'aire du disque. La dernière accolade représente un volume que nous représentons graphiquement comme suit:





Pour n tendant vers l'infini, ce volume tend vers une pyramide dont la base est un carré de côté 1 et la hauteur est de 1; son volume est donc $\frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}$. Le volume de l'empilement de cylindres tend donc vers

$$\pi \;- \pi \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \right\} \;\to\; \pi \;- \pi\, \frac{1}{3} = \frac{2\,\pi}{3}$$



qui représente le volume de la demi-boule. Le volume de la boule de rayon 1 est

$$V_1 = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Il s'ensuit que $\pi_3 = \pi$.

Quatrième définition de π

L'aire d'une sphère est

$$A = 4\,\pi_4\,r^2$$

De ce point de vue, l'aire d'une boule de rayon 1 est $A = 4\,\pi_4$.

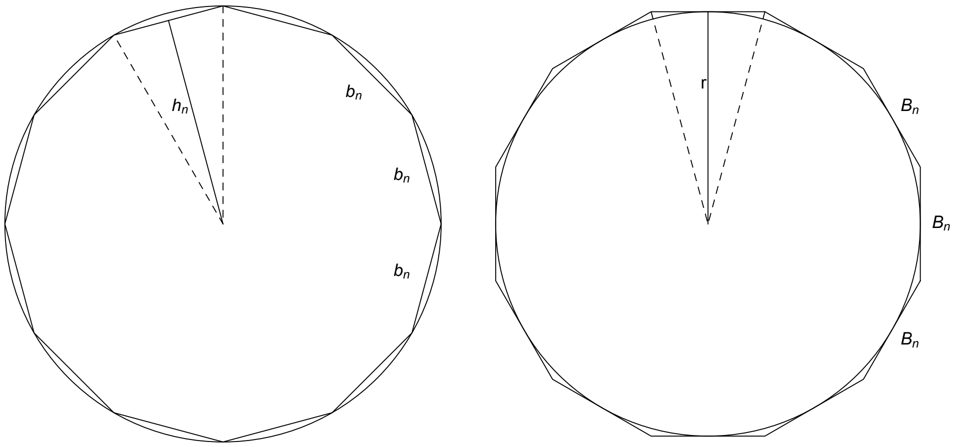
Sans démonstration: $\pi_4 = \pi$.

2. Calcul numérique du nombre π

Chez les Egyptiens

Vers 2700 ans avant J.-C. , les Egyptiens, selon qu'ils calculaient des longueurs ou des aires, utilisaient deux valeurs distinctes de π. La circonférence d'un cercle était déterminée de la manière suivante: $C = 3\,d$ ce qui correspond à $\pi = 3$. Mais, pour calculer l'aire d'un disque, ils procédaient comme suit: $A = \left(\frac{8\,d}{9}\right)^2$ ce qui correspond à $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \simeq 3.1605$.

Chez les Grecs



Périmètres des polygones inscrit et circonscrit à 12 côtés

$$24\,r\,\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi}{24}\right] \leq 2\,\pi\,r \leq 24\,r\,\mathrm{Tan}\left[\frac{2\pi}{24}\right]$$

$$6\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)r \leq 2\,\pi\,r \leq 24\left(2-\sqrt{3}\right)r$$

$$3\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right) \leq \pi \leq 12\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)+12\left(2-\sqrt{3}\right)}{2} \simeq 3.16061$$

$$\Delta\pi = \frac{12\left(2-\sqrt{3}\right)-3\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2} \simeq 0.0547809$$

$$\pi = 3.16 \pm 0.06$$

Calcul numérique de π à 100 chiffres (vers 1700)

On met au point une méthode de calcul efficace mais malheureusement trop longue à expliquer ici (ce développement pourrait faire l'objet d'un travail de maturité).

Grégory, 1671

La réciproque de la fonction tangente est exprimée au moyen d'une série

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \ldots$$

Machin, 1706

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Calcul numérique des 100 premiers chiffres (il suffit de prendre les 70 premiers termes de la série):

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{19}}{19} + \frac{x^{21}}{21} - \frac{x^{23}}{23} + \frac{x^{25}}{25} - \frac{x^{27}}{27} + \frac{x^{29}}{29} -$$
$$\frac{x^{31}}{31} + \frac{x^{33}}{33} - \frac{x^{35}}{35} + \frac{x^{37}}{37} - \frac{x^{39}}{39} + \frac{x^{41}}{41} - \frac{x^{43}}{43} + \frac{x^{45}}{45} - \frac{x^{47}}{47} + \frac{x^{49}}{49} - \frac{x^{51}}{51} + \frac{x^{53}}{53} - \frac{x^{55}}{55} + \frac{x^{57}}{57} -$$
$$\frac{x^{59}}{59} + \frac{x^{61}}{61} - \frac{x^{63}}{63} + \frac{x^{65}}{65} - \frac{x^{67}}{67} + \frac{x^{69}}{69} - \frac{x^{71}}{71} + \frac{x^{73}}{73} - \frac{x^{75}}{75} + \frac{x^{77}}{77} - \frac{x^{79}}{79} + \frac{x^{81}}{81} - \frac{x^{83}}{83} + \frac{x^{85}}{85} - \frac{x^{87}}{87} +$$
$$\frac{x^{89}}{89} - \frac{x^{91}}{91} + \frac{x^{93}}{93} - \frac{x^{95}}{95} + \frac{x^{97}}{97} - \frac{x^{99}}{99} + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{103}}{103} + \frac{x^{105}}{105} - \frac{x^{107}}{107} + \frac{x^{109}}{109} - \frac{x^{111}}{111} + \frac{x^{113}}{113} -$$
$$\frac{x^{115}}{115} + \frac{x^{117}}{117} - \frac{x^{119}}{119} + \frac{x^{121}}{121} - \frac{x^{123}}{123} + \frac{x^{125}}{125} - \frac{x^{127}}{127} + \frac{x^{129}}{129} - \frac{x^{131}}{131} + \frac{x^{133}}{133} - \frac{x^{135}}{135} + \frac{x^{137}}{137} - \frac{x^{139}}{139}$$

On obtient l'approximation de π suivante:

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862
80348253421170676778279277

L'erreur est

$$-3.043201588 \times 10^{-100}$$

Aujourd'hui

Avec des méthodes plus performantes encore et des ordinateurs, on peut calculer des millions de décimales de π.

La formule suivante, découverte en 1997 par *David Bailey*, *Peter Borwein* et *Simon Plouffe*

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

Le principe du calcul est le suivant: le nombre π est approché par une suite de nombres rationnels.

La somme des 18 premiers termes suffit pour déterminer les 25 premiers chiffres caractéristiques du nombre π

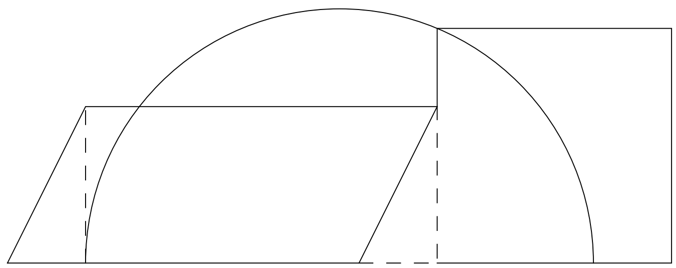
n	Coefficient	Terme	Valeur numérique approchée
0	$\frac{47}{15}$	$\frac{47}{15}$	3.13333333333333333333333
1	$\frac{106}{819}$	$\frac{53}{6552}$	3.14142246642246642246642
2	$\frac{829}{19\,635}$	$\frac{829}{5\,026\,560}$	3.14158739034658152305211
3	$\frac{316}{15\,225}$	$\frac{79}{15\,590\,400}$	3.14159245756743538183700 5
4	$\frac{857}{69\,597}$	$\frac{857}{4\,561\,108\,992}$	3.14159264546033631955702 1
5	$\frac{3802}{466\,785}$	$\frac{1901}{244\,729\,774\,080}$	3.14159265322808753473437 8
6	$\frac{5273}{911\,547}$	$\frac{5273}{15\,293\,220\,913\,152}$	3.14159265357288082778524 1
7	$\frac{776}{179\,645}$	$\frac{97}{6\,027\,885\,936\,640}$	3.14159265358897270494077 8
8	$\frac{1787}{533\,715}$	$\frac{1787}{2\,292\,288\,470\,384\,640}$	3.14159265358975227523617 8
9	$\frac{11\,126}{4\,165\,161}$	$\frac{5563}{143\,113\,842\,220\,597\,248}$	3.14159265358979114638877 7
10	$\frac{4519}{2\,072\,385}$	$\frac{4519}{2\,278\,611\,404\,728\,565\,760}$	3.14159265358979312961417 1
11	$\frac{16\,228}{8\,947\,437}$	$\frac{4057}{39\,351\,244\,081\,172\,840\,448}$	3.14159265358979323271129 2
12	$\frac{19\,139}{12\,491\,175}$	$\frac{19\,139}{3\,515\,953\,192\,213\,728\,460\,800}$	3.14159265358979323815476 6
13	$\frac{1486}{1\,133\,055}$	$\frac{743}{2\,551\,413\,037\,895\,138\,672\,640}$	3.14159265358979323844597 8
14	$\frac{25\,681}{22\,621\,131}$	$\frac{25\,681}{1\,630\,024\,274\,276\,786\,808\,815\,616}$	3.14159265358979323846173 2
15	$\frac{29\,312}{29\,539\,125}$	$\frac{229}{266\,064\,784\,685\,701\,005\,312\,000}$	3.14159265358979323846259 3
16	$\frac{3687}{4\,214\,903}$	$\frac{3687}{77\,751\,236\,936\,510\,610\,234\,933\,248}$	3.14159265358979323846264 1
17	$\frac{37\,294}{48\,002\,745}$	$\frac{18\,647}{7\,083\,954\,814\,804\,326\,482\,297\,487\,360}$	3.14159265358979323846264 3

Voir aussi **Calcul numérique du nombre π à plus de 120 décimales**:
http://www.deleze.name/marcel/culture/pi/decimales/index.html

3. Transcendance du nombre π

Les problèmes de quadrature

Considérons par exemple le problème de la quadrature du parallélogramme:
un parallélogramme étant donné, construire - avec la règle et le compas - un carré de même aire.



1° le parallélogramme est transformé en un rectangle de dimensions p, q;
2° au moyen du théorème de la hauteur, on construit h tel que $h^2 = p\,q$;
3° le carré de côté h est solution.

La quadrature du cercle

Un disque étant donné, construire - avec la règle et le compas - un carré de même aire.

Pendant des siècles, de nombreux mathématiciens ont effectué de nombreuses recherches sur ce problème, sans succès.

En 1882, l'allemand Ferdinand Lindemann démontra que π est un nombre transcendant (c'est-à-dire qu'il ne vérifie aucune équation polynomiale à coefficients entiers). Une conséquence de ce théorème d'algèbre est que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Une autre conséquence est que π est un nombre irrationnel (en particulier $\pi \neq 3.1416$ et $\pi \neq \frac{22}{7}$).

Lien hypertexte vers la page mère: Les mathématiques dans la culture générale

http://www.deleze.name/marcel/culture/