Pourquoi faut-il démontrer les théorèmes ?

L'histoire des mathématiques nous fournit un exemple spectaculaire qui montre que des vérifications, même très nombreuses, ne suffisent pas.

Le nombre de facteurs premiers est-il pair ou impair ?

Dans la décomposition d'un nombre naturel en facteurs premiers, par exemple $360 = 2^3\,3^2\,5^1$, comptons le nombre de facteurs premiers. Ainsi, 13 est formé d'un seul facteur premier, tandis que 360 est formé de 6 facteurs premiers. La décomposition en facteurs premiers des entiers de 2 à 999 peut être consultée à l'adresse http://www.deleze.name/marcel/culture/premiers/facteurs.html

Puisque 13 comporte un nombre impair de facteurs premiers, nous dirons que 13 est **de type impair**. Comme 360 comporte un nombre pair de facteurs premiers, 360 sera dit **de type pair**.

Déterminons le type pair ou impair des 24 premiers entiers positifs. Un 0 indique que le nombre est de type pair tandis qu'un 1 indique que le nombre est de type impair.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0

On constatera que, sur les 24 premiers entiers positifs, il y en a 11 de type pair et 13 de type impair.

Hypothèse de *Pólya*

Au tableau précédent, ajoutons 3 lignes, ce qui donne:
* sur la ligne 1: un entier n;
* sur la ligne 2: le type de cet entier;
* sur la ligne 3: le nombre d'entiers de type impair parmi {1, 2, ..., n};
* sur la ligne 4: le nombre d'entiers de type pair parmi {1, 2, ..., n}
* sur la ligne 5: d[n] = (ligne 3) - (ligne 4) = excédent du nombre des type impairs sur les types pairs dans l'intervalle 1..n

Par exemple, d[8]= 5 - 3 = 2 signifie que, entre 1 et 8, il y a 2 entiers de type impair de plus que de type pair

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	2	2	3	3	4	5	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	11	12	12	12	13	13
1	1	1	2	2	3	3	3	4	5	5	5	5	6	7	8	8	8	8	8	9	10	10	11
−1	0	1	0	1	0	1	2	1	0	1	2	3	2	1	0	1	2	3	4	3	2	3	2

En 1919, *George Pólya* a formulé l'hypothèse suivante: en un sens à préciser, **le nombre d'entiers de type impair est plus grand ou égal au nombre d'entiers de type pair**.

Un programme *Mathematica* calcule de combien le nombre d'entiers type impair dépasse le nombre d'entiers de type pair

```
Clear[d];
d = Compile[{{n, _Integer}},
   Module[{s, k}, s = -1; Do[If[Mod[Apply[Plus, Transpose[FactorInteger[k]][[2]]], 2] == 0,
      s = s - 1, s = s + 1], {k, 2, n}]; s]];
```

Voici la suite obtenue pour les entiers de 1 à 99:

```
Join[{-1}, Table[d[n], {n, 2, 99}]]
```

```
{-1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5,
 4, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2,
 3, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 5, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3}
```

Plus précisément, l'hyporthèse que *George Pólya* a formulée en 1919 est que, **pour tout n ≥ 2, on a d[n] ≥ 0.**

Suffit-il de vérifier l'hypothèse par de nombreux exemples ?

Avec un ordinateur, vérifions l'hypothèse pour n ≤ 1 000 000

```
Clear[d];
d = Compile[{{n, _Integer}}, Module[{s, k}, s = -1;
    Do[If[Mod[Apply[Plus, Transpose[FactorInteger[k]][[2]]], 2] == 0, s = s - 1, s = s + 1];
     If[s < 0, Print["Une exception est d[", k, "]= ", s]],
     {k, 2, n}]; s]];
```

```
d[1 000 000]
```

```
530
```

d[1 000 000] = 530 signifie que, entre 1 et 1 000 000, il y a 530 impairs de plus que de pairs.

Puisque la proposition est valide jusqu'à n = 1 000 000, on peut penser qu'elle est aussi valide pour les n > 1 000 000. L'hypothèse de *Pólya* s'en trouve confortée. Peut-on considérer que le problème est résolu ?

Des contre-exemples

En 1958, *Brian Haselgrove* a démontré que l'hypothèse de *Pólya* était fausse. Dès 1960, avec des ordinateurs, on a calculé des contre-exemples. Pour recalculer en 2009 les plus petits contre-exemples, la durée d'exécution du programme *Mathematica* sur mon ordinateur domestique est d'environ 5 heures 30 min.

```
t = Timing[d[906 150 260]]
```

```
Une exception est d[906 150 257]= -1
Une exception est d[906 150 258]= -2
Une exception est d[906 150 259]= -3
Une exception est d[906 150 260]= -4
```

```
{19 806.8, -4}
```

Conclusion

Pour une proposition qui dépend d'un entier naturel n, retenons que, même si elle est vraie jusqu'à 906 millions, il reste nécessaire de produire une démonstration pour affirmer qu'elle est vraie pour tout entier n.

Remarque

Au moyen d'un ordinateur, il n'est pas possible de vérifier si une proposition dépendant d'un entier naturel est vraie, car le nombre de vérifications à exécuter est infini. Une démonstration mathématique traditionnelle est nécessaire.

Lien hypertexte vers la page mère: Mathématiques dans la culture générale

http://www.deleze.name/marcel/culture/