Certains infinis sont-ils plus grands que d'autres ?

1.1 Il y a autant de rationnels que de naturels

Puisque les naturels 0, 1, 2, 3, 4, ... sont aussi des rationnels $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots$, il s'ensuit que ≪ le nombre de rationnels est plus grand ou égal au nombre de naturels ≫.

Nous allons montrer montrer que, *à chaque naturel, on peut faire correspondre un rationnel de telle sorte que **tous** les rationnels soient ainsi numérotés*. Par conséquent, ≪ le nombre de naturels est plus grand ou égal au nombre de rationnels ≫ . Pour ce faire, **Cantor** a dressé la suite

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$$
$$\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}$$
$$\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$$
$$\text{etc.}$$

Sur chaque ligne, la somme du numérateur et du dénominateur est constante.
En lisant le tableau de gauche à droite et de haut en bas, tous les rationnels sont numérotés avec les naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., .

Les rationnels négatifs ne changent rien à l'affaire. Finalement, ≪ il y a autant de rationnels que de naturels ≫.

1.2 Notations et résultat

On dit que l'ensemble des naturels est **dénombrable**. Le nombre de naturels (on dit "le cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels") est noté

$$\mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$$

Le nombre de rationnels (on dit "le cardinal de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels") est noté

$$\mathrm{Card}\,(\mathbb{Q})$$

Compte tenu que $\mathrm{Card}\,(\mathbb{Q}^+) = \mathrm{Card}\,(\mathbb{Q})$ où $\mathbb{Q}^+$ désigne l'ensemble des rationnels positifs, nous avons démontré que

$$\mathrm{Card}\,(\mathbb{Q}) = \mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$$

En mots: **l'ensemble des rationnels est dénombrable**.

■ 2.1 Il y a plus de réels que de naturels

Les réels suivants sont compris entre 0 et 1:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots$$

ce qui montre que ≪ le nombre de réels entre 0 et 1 est plus grand ou égal au nombre de naturels ≫.

Nous allons démontrer que ≪ il y a plus de réels entre 0 et 1 que de naturels ≫.

Supposons par l'absurde que ≪ il y a autant de réels entre 0 et 1 que de naturels ≫.
Les réels de l'intervalle [0; 1] peuvent être organisés une suite qui pourrait prendre (par exemple) la forme suivante:

$$r_1 = 0.\underline{1}58937\ldots$$

$$r_2 = 0.4\underline{6}2496\ldots$$

$$r_3 = 0.93\underline{4}851\ldots$$

$$r_4 = 0.291\underline{3}60\ldots$$

$$r_5 = 0.8734\underline{2}9\ldots$$

$$r_6 = 0.71546\underline{5}\ldots$$

$$r_7 = \ldots$$

En d'autres termes, nous avons supposé que cette suite - qui contient autant d'éléments que de naturels 1, 2, 3, 4, 5, ... - contient exactement une fois chaque réel compris entre 0 et 1. Par hypothèse, il y a ainsi autant de réels entre 0 et 1 qu'il y a de naturels.

A partir de cette suite, formons un nouveau réel *s*

$$s = 0.358149\ldots$$

qui est construit en choisissant chaque décimale comme suit:

la première décimale de *s* diffère de la première décimale de r_1 (3 au lieu de $\underline{1}$);

la 2-ème décimale de *s* diffère de la 2-ème décimale de r_2 (5 au lieu de $\underline{6}$);

la 3-ème décimale de *s* diffère de la 3-ème décimale de r_3 (8 au lieu de $\underline{4}$);

la 4-ème décimale de *s* diffère de la 4-ème décimale de r_4 (1 au lieu de $\underline{3}$);

la 5-ème décimale de *s* diffère de la 5-ème décimale de r_5 (4 au lieu de $\underline{2}$);

la 6-ème décimale de *s* diffère de la 6-ème décimale de r_6 (9 au lieu de $\underline{5}$);

etc.

s est différent de r_1, *s* est différent de r_2, *s* est différent de r_3, *s* est différent de r_4, etc. Donc *s* n'appartient pas à la suite $r_1, r_2, r_3, \ldots$

Or, nous avons supposé que la suite $r_1, r_2, r_3, \ldots$ comporte tous les réels entre 0 et 1.

L'hypothèse ≪ il y a autant de réels entre 0 et 1 que de naturels ≫ conduit à une contradiction. Cette hypothèse est donc fausse. C'est le contraire qui est vrai: ≪ il y a plus de réels entre 0 et 1 que de naturels ≫.

Cette démonstration est connue sous l'apellation ≪ argument de la suite diagonale de ***Cantor*** ≫.

2.2 Notations et résultat

Le nombre de réels (on dit "le cardinal de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels") est noté

$$\text{Card}(\mathbb{R})$$

Compte tenu que $\text{Card}(\mathbb{R}) \geqslant \text{Card}([0;1])$, nous avons démontré que

$$\text{Card}(\mathbb{R}) > \text{Card}(\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{N})$$

En mots: **L'ensemble des réels n'est pas dénombrable. On dit que l'ensemble des réels a la puissance du continu.**

Line hypertexte vers la page mère: Mathématiques dans la culture générale

http://www.deleze.name/marcel/culture/