a3 - Dérivées II (renforcé): études de fonctions rationnelles et irrationnelles

Corrigé de l'exercice 1

Ensemble de définition

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

Les zéros de la fonction ne sont pas demandés.

Dérivée

$$f'(x) = \frac{3x^2 \left(3x^2 - 1\right) - x^3 (6x)}{\left(3x^2 - 1\right)^2} + 0 = \frac{3x^2 \left(x^2 - 1\right)}{\left(3x^2 - 1\right)^2}$$

Zéros de la dérivée

$$Z_{f'} = \{-1;\ 0;\ 1\}$$

Signe de la dérivée

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	∞
sign(x^2)	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
sign(x^2-1)	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+
sign$(3x^2-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
sign$(f'(x))$	+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+

Dérivée seconde

$$f''(x) = 3 \left(\frac{x^4 - x^2}{\left(3x^2 - 1\right)^2} \right)' = 3\, \frac{\left(4x^3 - 2x\right) \left(3x^2 - 1\right)^2 - \left(x^4 - x^2\right) 2 \left(3x^2 - 1\right) (6x)}{\left(3x^2 - 1\right)^4} =$$

$$3\, \frac{2x \left(3x^2 - 1\right) \left(\left(2x^2 - 1\right) \left(3x^2 - 1\right) - \left(x^4 - x^2\right) 6 \right)}{\left(3x^2 - 1\right)^4} = \frac{6x \left(x^2 + 1\right)}{\left(3x^2 - 1\right)^3}$$

Signe de la dérivée seconde

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞
sign$(6\,x)$	−	−	−	0	+	+	+
sign(x^2+1)	+	+	+	+	+	+	+
sign$(3\,x^2-1)^3$	+	0	−	−	−	0	+
sign$(f''(x))$	−	‖	+	0	−	‖	+

Tableau de variations

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	∞
sign$(f'(x))$	+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+
sign$(f''(x))$	−	−	−	‖	+	0	−	‖	+	+	+
Var(f)	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Extremums et points d'inflexion

$$f(-1) = 0 \qquad \text{max. en } (-1;\ 0)$$

$$f(1) = 1 \qquad \text{min. en } (1;\ 1)$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{P.I. en } \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$$

Asymptotes verticales

$$\lim_{x \uparrow -\sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\text{neg}}{\text{neg} \cdot (0^-)} + \frac{1}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow -\sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\text{neg}}{\text{neg} \cdot (0^+)} + \frac{1}{2} = +\infty$$

$\Longrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ est asymptote verticale double

$$\lim_{x \uparrow \sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\text{pos}}{(0^-) \cdot \text{pos}} + \frac{1}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow \sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\text{pos}}{(0^+) \cdot \text{pos}} + \frac{1}{2} = +\infty$$

$\Longrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ est asymptote verticale double

Asymptote affine

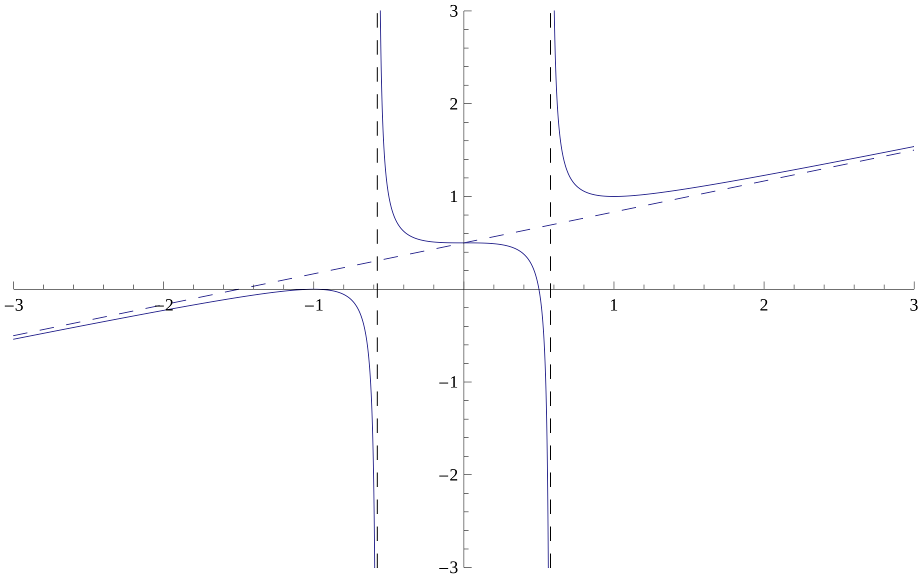
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{3x^2-1} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{3}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - a\,x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-1} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right) =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^3 + 3\left(3x^2-1\right) - 2x\left(3x^2-1\right)}{6\left(3x^2-1\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{9x^2+2x-3}{6\left(3x^2-1\right)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique double

Graphique



▪ Corrigé de l'exercice 2

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

Première condition

$$f'(3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6b + c + 27 = 0$$

Deuxième condition: la tangente à f en 3 est $y = f'(3)(x-3) + f(3) = f(3)$. Cette tangente coupe la courbe $y = f(x)$ en $x = 1$ si

$$f(3) = f(1) \quad \Longleftrightarrow \quad 9b + 3c + 27 = b + c + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4b + c + 13 = 0$$

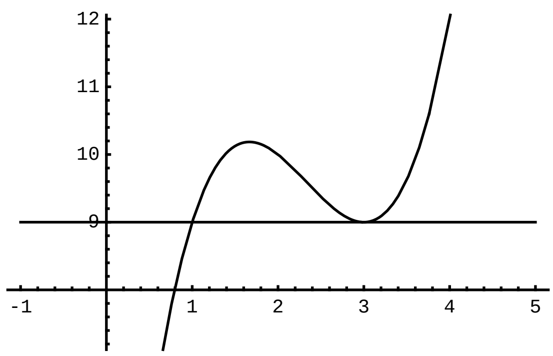
Résolution du système

$$b = -7; \quad c = 15. \quad \text{Candidat} \quad f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x$$

Troisième condition: la dérivée de f change de signe en $x = 3$. Vérification:

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 15 \ \text{ a pour zéros } \left\{\frac{5}{3};\ 3\right\}. \ \text{Donc } f \text{ est solution.}$$

Situation (non demandé):



▪ Corrigé de l'exercice 3

▪ a) Ensemble de définition

$$f(x) \text{ est défini} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-4x^3}{-x+2} \geq 0$$

x	$-\infty$	0		2	∞
Sign$(-4x^3)$	+	0	−	−	−
Sign$(-x+2)$	+	+	+	0	−
Sign$\left(\frac{-4x^3}{-x+2}\right)$	+	0	−	‖	+

$$D_f =]-\infty;\ 0] \cup]2;\ \infty[$$

- **b) Signe de la fonction**

$$Z_f = \{0\}$$

x	$-\infty$	0		2	∞
Sgn$(f(x))$	$+$	0	////	$\|\|$	$+$

- **c) Limites et asymptotes**

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \sqrt{\frac{-32}{0^-}} = \infty; \text{ asymptote verticale simple } x = 2$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{-4x^2}{-1 + \frac{2}{x}}} = \infty; \text{ aucune asymptote horizontale}$$

$$a_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{-4}{-1 + \frac{2}{x}}} = 2$$

$$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} = \lim_{x \to -\infty} (-1) \sqrt{\frac{-4}{-1 + \frac{2}{x}}} = -2$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} (f(x) - a_1 x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x\right)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x\right)}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-4x^3}{-x+2} - 4x^2}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-8x^2}{(-x+2)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-8}{\left(-1 + \frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} + 2\right)} = 2;$$

asymptote oblique simple $y = 2x + 2$ du côté de $+\infty$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - a_2 x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x\right)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x\right)}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{-4x^3}{-x+2} - 4x^2}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-8x^2}{(-x+2)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-8}{\left(-1 + \frac{2}{x}\right)\left(-\sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} - 2\right)} = -2;$$

asymptote oblique simple $y = -2x - 2$ du côté de $-\infty$

- **d) Tableau de variations**

$$f'(x) = \left(\left(\frac{-4x^3}{-x+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{-4x^3}{-x+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-4x^3}{-x+2}\right)' =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{\left(-12x^2\right)(-x+2) - \left(-4x^3\right)(-1)}{(-x+2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{12x^3 - 24x^2 - 4x^3}{(-x+2)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{8x^3 - 24x^2}{(-x+2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{8x^2(x-3)}{(-x+2)^2} = \frac{4x^2(x-3)}{(-x+2)^2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}}$$

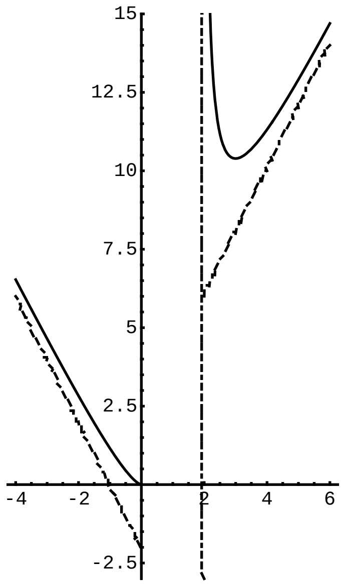
$Z_{f'} = \{3\}$

x	$-\infty$	0		2		3	∞
$Sign(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$Sign(f'(x))$	$-$	$\Vert$	$////$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$Var(f)$	∞ $\searrow$	0		∞	$\searrow$	$6\sqrt{3}$	$\nearrow$ ∞

$$\text{min. relatif} \quad f(3) = 6\sqrt{3} \simeq 10.39$$

$$\text{min. de bord} \quad f(0) = 0$$

- **e) Graphique**



- **Lien vers la page mère: "Exercices corrigés"**

[http : // www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/](http://www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/)