Énoncés des exercices « a2- Suites, séries, récurrence »

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a2/a2-suites.pdf

a2- Suites, séries, récurrence - Corrigés

Corrigé de l'exercice 1

$$\begin{gathered}
r = \frac{3}{2} \\
u_n = u_1 + r(n-1) = 3 + \frac{3}{2}(n-1) = \frac{3}{2}(n+1) \\
u_1 + u_2 + \ldots + u_n \geq 5000 \\
n\frac{u_1 + u_n}{2} \geq 5000 \\
n\frac{3 + \frac{3}{2}(n+1)}{2} \geq 5000 \\
\frac{3}{4}n(3+n) \geq 5000 \\
3n(3+n) \geq 20000 \\
3n^2 + 9n - 20000 \geq 0 \\
(n \leq -83.16 \quad \text{ou} \quad n \geq 80.16) \quad \text{où} \quad (n \geq 1 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}) \\
n \geq 81
\end{gathered}$$

Corrigé de l'exercice 2

Ancrage à $n = 1$

$$1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} \quad \text{vrai}$$

Hypothèse de récurrence

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

A montrer

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + (n+1)x^n &\overset{\text{hyp.}}{=} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} + (n+1)x^n \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 + (n+1)x^n\left(x^2 - 2x + 1\right)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 + (n+1)x^{n+2} - 2(n+1)x^{n+1} + (n+1)x^n}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

Ancrage à $n=0$ ou à $n=1$

$$(x+1)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x \quad \text{vrai}$$

$$(x+1)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x \quad \text{vrai}$$

Hypothèse de récurrence

$$(x+1)^n \geq 1 + nx$$

A montrer

$$(x+1)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

En effet,

$$\begin{aligned}(x+1)^{n+1} &= (x+1)^n(x+1) \\ &\overset{\text{hyp.}}{\geq} (1+nx)(x+1) \\ &\geq 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4

Situation initiale

$$u_0 = 1$$

Après 1 renouvellement

$$u_1 = 1 + \frac{1}{6}u_0 = 1 + \frac{1}{6}$$

Après 2 renouvellements

$$u_2 = 1 + \frac{1}{6}u_1 = 1 + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

Après 3 renouvellements

$$u_3 = 1 + \frac{1}{6}u_2 = 1 + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

Après n renouvellements

$$u_n = 1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{6}\right)^n = 1\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)$$

A la limite pour $n \longrightarrow \infty$

$$u_\infty = 1\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5} = 1.2 \quad \text{[litre]}$$

Corrigé de l'exercice 5

$$u_1 + u_2 = 24 \quad \text{et} \quad u_3 + u_4 = 1176$$
$$u_1 + u_1 r = 24 \quad \text{et} \quad u_1 r^2 + u_1 r^3 = 1176$$
$$u_1(1 + r) = 24 \quad \text{et} \quad u_1 r^2(1 + r) = 1176$$
$$\frac{u_1 r^2(1 + r)}{u_1(1 + r)} = \frac{1176}{24}$$
$$r^2 = 49$$

Première solution

$$r = 7; \quad u_1 = \frac{24}{1 + r} = 3; \quad u_2 = ru_1 = 21; \quad u_3 = ru_2 = 147; \quad u_4 = ru_3 = 1029.$$

Deuxième solution

$$r = -7; \quad u_1 = \frac{24}{1 + r} = -4; \quad u_2 = ru_1 = 28; \quad u_3 = ru_2 = -196; \quad u_4 = ru_3 = 1372.$$

Corrigé de l'exercice 6

$$u_1 = 0.7u_0$$
$$u_n = 0.7^n u_0$$
$$u_{10} = 0.7^{10} u_0 \simeq 0.0282475 u_0$$

Il a perdu 97.174 %

$$u_{12} = 0.7^{12} u_0 \simeq 0.0138413 u_0$$
$$u_{13} = 0.7^{13} u_0 \simeq 0.0096889 u_0$$

Il faut au moins 13 plaques.

Corrigé de l'exercice 7

$$c_0 = 1$$
$$c_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$c_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \text{suite géom. de raison } \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a_n = c_n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{suite géom. de raison } \frac{1}{2}$$
$$S = 4c_0 + 4c_1 + ... + 4c_{20} = 4\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{21}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \simeq 13.6474$$

Corrigé de l'exercice 8

$$u_1 = 13, \quad u_2 = 26, \quad ..., \quad u_n = 13n$$

$$u_n < 10000 \iff 13n < 10000 \iff n < 769.23 \iff n \leqslant 769$$

$$u_{769} = 9997$$

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$S_{769} = 13 + ... + 9997 = 769\frac{13 + 9997}{2} = 3848845$$

Corrigé de l'exercice 9

$$A_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 A_1 = \frac{1}{16}A_1$$

$$C_2 = \frac{3}{4}A_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{16}A_1$$

$$A_3 = \frac{1}{16}A_2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 A_1$$

$$C_3 = \frac{3}{4}A_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^2 A_1$$

$$A_n = \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} A_1$$

$$C_n = \frac{3}{4}A_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} A_1$$

Somme des aires noircies :

$$\begin{aligned} S_n &= C_1 + C_2 + ... + C_n \\ &= \frac{3}{4}A_1 + ... + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} A_1 \\ &= \frac{3}{4}A_1\frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{3}{4}A_1\frac{16}{15}\left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right) \\ &= \frac{4}{5}A_1\left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$S_{40} = \frac{4}{5}A_1\left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{40}\right) \simeq \frac{4}{5}A_1$$

Pourcentage noirci :

$$\frac{S_{40}}{A_1} \simeq \frac{4}{5} = 80\%$$

Corrigé de l'exercice 10

a)

$$a_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$$

b)

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1+2, \quad b_3 = 1+2+3, \quad b_4 = 1+2+3+4, \quad \ldots$$

$$b_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

c)

$$c_n = \text{valeur du terme } a_k \text{ d'indice } k = b_n$$

$$c_n = 3 b_n + 2 = 3\frac{n(n+1)}{2} + 2$$

d) Valeur approximative de n

$$c_n = 3674$$

$$3\frac{n(n+1)}{2} + 2 = 3674$$

$$3n^2 + 3n - 7344 = 0$$

$$n_1 \simeq -49.98; \quad n_2 \simeq 48.98$$

$$c_{48} = 3530 \quad \text{dernier nombre de la 48-ème ligne}$$

$$c_{49} = 3677 \quad \text{dernier nombre de la 49-ème ligne}$$

$$3674 \quad \text{se trouve sur la 49-ème ligne}$$

e) 3674 est l'avant-dernier nombre de la ligne ; il se trouve donc dans la 48-ème colonne.

Lien vers la page mère : Exercices avec corrigés sur www.deleze.name

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/index.html

Marcel Délèze