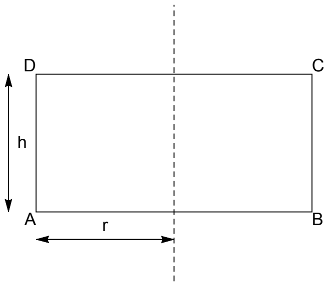
Énoncés des exercices « 3s - Dérivées II: problèmes d'extremums »

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/3s/3s-extremums.pdf

3s - Dérivées II : problèmes d'extremums - Corrigés

Corrigé de l'exercice 1

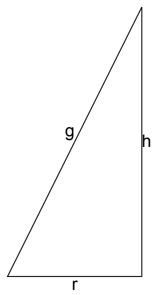


1. **Constante(s)** p
2. **Variable(s)** $r,\ h$
3. **Expression dont on cherche l'extremum** $V = \pi r^2 h$
4. **Contrainte(s)** $4r + 2h = 2p \quad \Longrightarrow \quad h = p - 2r$
5. **Fonction** $V(r) = \pi r^2 (p - 2r) = \pi \left(p r^2 - 2 r^3\right)$
6. **Etude de la fonction** $0 \le 2r \le p \quad \Longrightarrow \quad D_V = \left[\ 0;\ \frac{p}{2}\right]$
   $V'(r) = \pi \left(2pr - 6r^2\right) = 2\pi r (p - 3r)$
   $Z_{V'} = \left\{0; \frac{p}{3}\right\}$

r		0		$\frac{p}{3}$		$\frac{p}{2}$	
Sign$(2\pi r(p-3r))$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
Sign$(V'(r))$	$\Vert$	0	$+$	0	$-$	$-$	$\Vert$
Var$(V(r))$		0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	

7. **Interprétation** Les dimensions optimales sont
   $r = \frac{p}{3} \quad \Longrightarrow \quad \text{largeur} = 2r = \frac{2p}{3}$;
   $h = p - 2r = p - 2\frac{p}{3} = \frac{p}{3}$.

Corrigé de l'exercice 2



1. **Constante(s)** g
2. **Variable(s)** $r,\ h$
3. **Expression dont on cherche l'extremum** $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$
4. **Contrainte(s)** $g^2 = r^2 + h^2 \implies r^2 = g^2 - h^2$
5. **Fonction** $V(h) = \frac{\pi}{3}\ (g^2 - h^2)\, h = \frac{\pi}{3}\, (g^2 h - h^3)$
6. **Etude de la fonction** $0 \leq h \leq g \implies D_V = [\ 0;\ g]$
   $V'(h) = \frac{\pi}{3}\, (g^2 - 3h^2)$
   $Z_{V'} = \left\{-\frac{g}{\sqrt{3}}; \frac{g}{\sqrt{3}}\right\} \cap D_V = \left\{\frac{g}{\sqrt{3}}\right\}$

h		$-\frac{g}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{g}{\sqrt{3}}$		g	
Sign $\left(\frac{\pi}{3}\, (g^2 - 3h^2)\right)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
Sign$(V'(h))$	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$\Vert$
Var$(V(h))$				0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	

7. **Interprétation** Les dimensions optimales sont

$$h = \frac{g}{\sqrt{3}}$$

$$r = \sqrt{g^2 - \frac{1}{3} g^2} = g\sqrt{\frac{2}{3}} = h\sqrt{2}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. **Constante(s)** $\mathrm{AB} = 6, \quad \mathrm{BC} = 2; \quad \mathrm{AD} = 5$
2. **Variable(s)** $x = \mathrm{AP}, \quad y = \mathrm{AR}$
3. **Expression dont on cherche l'extremum** $A =$ aire du rectangle

$$A = xy$$

4. **Relation(s) entre les variables** Théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{RQ}}{6} = \frac{\mathrm{DR}}{3} \iff \frac{x}{6} = \frac{5-y}{3}$$

$$x = 2(5-y)$$

5. **Expression dont on cherche l'extremum en fonction d'une seule variable**

$$A(y) = 2(5-y)y = 2\left(5y - y^2\right)$$

6. **Etude de la fonction** Ensemble de définition

$$2 \leq y < 5$$

$$D_A = [2, 5[$$

Dérivée

$$A'(y) = 2(5-2y)$$

Signe de la dérivée et tableau de variations

y	2		$\frac{5}{2}$		5
Sign$(A'(y))$	$\|\|$ +	+	0	−	− $\|\|$
Var$(A(y))$	$\|\|$ 12	$\nearrow$	max	$\searrow$	0 $\|\|$

7. **Interprétation** L'aire du bâtiment est maximale pour $\mathrm{AR} = \frac{5}{2}$ et $\mathrm{AP} = 5$.

Corrigé de l'exercice 4

1. **Constante(s)** $h = 1$ mètre $=$ hauteur de l'oeuvre décorative.
2. **Variable(s)** $c =$ côté du cube ; $r =$ rayon de la sphère.
3. **Expression dont on cherche l'extremum** Volume total

$$V = c^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

4. **Relation(s) entre les variables** Hauteur totale de l'oeuvre décorative

$$c + 2r = h \iff c = h - 2r$$

5. **Expression dont on cherche l'extremum en fonction d'une seule variable**

$$V(r) = (h - 2r)^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

6. **Etude de la fonction** Ensemble de définition

$$c \geq 0 \quad \text{et} \quad c = h - 2r \geq 0 \quad \iff \quad 0 \leq r \leq \frac{h}{2}$$

$$D_V = \left[0, \frac{h}{2}\right]$$

Dérivée et calcul numérique

$$V'(r) = 3(h-2r)^2(-2) + \frac{4}{3}\pi 3r^2 = -11.4326r^2 + 24hr - 6h^2$$

Zéros de la dérivée avec $h = 1$

$$r = 0.290085 \quad \text{ou} \quad r = 1.80917(\text{ à exclure})$$

Signe de la dérivée et tableau de variations

r		0		0.29		$\frac{1}{2}$	
Sign$(V'(r))$	$\|$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\|$
Var$(V(r))$	$\|$		$\searrow$		$\nearrow$		$\|$
				min			

7. **Interprétation** Pour une oeuvre décorative de volume minimal, la sphère doit avoir un rayon de 0.29 mètre et le côté du cube doit valoir

$$c = h - 2r \simeq 0.42 \text{ mètre}$$

Lien vers la page mère : Exercices avec corrigés sur www.deleze.name

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/index.html

Marcel Délèze