

Démographie

## Calcul d'un quantile et de l'espérance de vie à partir d'une table de mortalité

### ■ Résumé

A partir d'une table de mortalité, pour une personne d'un âge donné  $x$ , comment calculer

- un quantile, par exemple l'âge  $y$  tel que la probabilité d'atteindre l'âge  $y$  est de 80 %;
- l'espérance de vie ?

La méthode de calcul fait appel à la représentation des données par un histogramme, plus précisément

- les âges sont subdivisés en intervalles d'une année: la variable "**borne**" définit des bornes des classes;
- pour chaque classe, la probabilité de décès "**fd**" est calculée;  
les *Tables de mortalité* donnant des probabilités conditionnelles, on peut représenter la situation par un arbre;  
chaque "**fd**" est un produit de probabilités conditionnelles;
- les fréquences cumulées "**ffd**" représentent des valeurs de la fonction de distribution aux "**borne**" correspondantes;
- un quantile se calcule avec la fonction réciproque de la fonction de distribution,  
c'est-à-dire en intervertissant les rôles de "**borne**" et de "**ffd**";  
pour obtenir une valeur intermédiaire, on interpole linéairement dans la table.

### ■ Liens hypertextes

vers le calculateur en ligne

*Espérance de vie d'un homme ou d'une femme en fonction de l'âge, avec quintiles de mortalité et histogramme*  
<http://www.deleze.name/marcel/culture/probabilites/population/index.html>

vers la page mère

<http://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/index.html>

### ■ Sources

Cours: *Statistique descriptive à une variable continue*

[http://www.collegeusud.ch/app/applmaths/cours/statistique\\_1/2-stat\\_I.pdf](http://www.collegeusud.ch/app/applmaths/cours/statistique_1/2-stat_I.pdf)

Tables de mortalité de l'*Office fédéral de la Statistique* des hommes en 2009.

### ■ Input

```
sexe = "homme";
```

```
age = 39.25;
```

### ■ Table de mortalité et probabilité conditionnelle de décès "pcd"

tpd = table des probabilités de décès de l'âge  $x$  à l'âge  $x+1$ ;

tpd[x] = probabilité qu'un homme soit décédé à l'âge  $x+1$  sachant qu'il est vivant à l'âge  $x$ ,

pour  $x = 0, 1, 2, \dots, 99$

*Exemple: hommes en 2009*

```

tpd = {0.004811, 0.000200, 0.000108, 0.000093, 0.000084, 0.000079, 0.000076, 0.000077,
      0.000079, 0.000083, 0.000088, 0.000095, 0.000103, 0.000112, 0.000128, 0.000159,
      0.000222, 0.000328, 0.000477, 0.000633, 0.000727, 0.000740, 0.000701, 0.000649,
      0.000609, 0.000583, 0.000570, 0.000566, 0.000570, 0.000582, 0.000600, 0.000625,
      0.000654, 0.000688, 0.000726, 0.000768, 0.000815, 0.000868, 0.000927, 0.000995,
      0.001072, 0.001160, 0.001261, 0.001379, 0.001515, 0.001672, 0.001852, 0.002057,
      0.002288, 0.002547, 0.002835, 0.003152, 0.003498, 0.003870, 0.004267, 0.004688,
      0.005136, 0.005614, 0.006126, 0.006676, 0.007269, 0.007913, 0.008616, 0.009388,
      0.010243, 0.011191, 0.012248, 0.013430, 0.014756, 0.016249, 0.017938, 0.019854,
      0.022037, 0.024535, 0.027401, 0.030687, 0.034447, 0.038738, 0.043624,
      0.049172, 0.055451, 0.062531, 0.070484, 0.079374, 0.089262, 0.100185,
      0.112164, 0.125189, 0.139220, 0.154175, 0.169926, 0.186290, 0.203031,
      0.219854, 0.235959, 0.248497, 0.253754, 0.248281, 0.230005, 0.199353};

```

```
ltpd = Length[tpd]
```

```
100
```

## ■ Bornes des intervalles des classes

Seule la partie des tables postérieure à l'âge de la personne est exploitée.

En fin de liste, une classe est rajoutée pour les personnes qui vivent au-delà du dernier âge tabulé.

```
zero = Floor[age]
```

```
39
```

```
un = zero + 1
```

```
40
```

```
Clear[borne, i]; borne[zero] = age;
```

```
Do[borne[i] = i, {i, un, ltpd}];
```

```
borne[ltpd + 1] = 105;
```

```
? borne
```

```
Global`borne
```

```
borne[39] = 39.25
```

```
borne[40] = 40
```

```
borne[41] = 41
```

```
borne[42] = 42
```

```
borne[43] = 43
```

```
borne[44] = 44
```

```
borne[45] = 45
```

```
borne[46] = 46
```

```
borne[47] = 47
```

```
borne[48] = 48
```

```
borne[49] = 49
```

```
borne[50] = 50
```

```
borne[51] = 51
```

borne[52] = 52

borne[53] = 53

borne[54] = 54

borne[55] = 55

borne[56] = 56

borne[57] = 57

borne[58] = 58

borne[59] = 59

borne[60] = 60

borne[61] = 61

borne[62] = 62

borne[63] = 63

borne[64] = 64

borne[65] = 65

borne[66] = 66

borne[67] = 67

borne[68] = 68

borne[69] = 69

borne[70] = 70

borne[71] = 71

borne[72] = 72

borne[73] = 73

borne[74] = 74

borne[75] = 75

borne[76] = 76

borne[77] = 77

borne[78] = 78

borne[79] = 79

borne[80] = 80

borne[81] = 81

borne[82] = 82

borne[83] = 83

borne[84] = 84

borne[85] = 85

borne[86] = 86

borne[87] = 87

```

borne[88] = 88

borne[89] = 89

borne[90] = 90

borne[91] = 91

borne[92] = 92

borne[93] = 93

borne[94] = 94

borne[95] = 95

borne[96] = 96

borne[97] = 97

borne[98] = 98

borne[99] = 99

borne[100] = 100

borne[101] = 105

```

## ■ Probabilité conditionnelle de décès "pcd"

Seule la partie des tables postérieure à l'âge de la personne est exploitée. Pour un âge qui n'est pas entier, la fréquence de la classe correspondante est fractionnée.

pcd = probabilité conditionnelle de décès, comptabilisée à partir de l'âge donné;

**pcd[i]** = probabilité que la personne soit vivante à l'âge **borne[i+1]** sachant qu'elle est vivante à l'âge **borne[i]**

```

Clear[pcd, i]; pcd[zero] = tpd[[zero + 1]] * (un - age);
Do[pcd[i] = tpd[[i + 1]], {i, un, ltpd - 1}];
? pcd

```

```
Global`pcd
```

```

pcd[39] = 0.00074625

pcd[40] = 0.001072

pcd[41] = 0.00116

pcd[42] = 0.001261

pcd[43] = 0.001379

pcd[44] = 0.001515

pcd[45] = 0.001672

pcd[46] = 0.001852

pcd[47] = 0.002057

pcd[48] = 0.002288

pcd[49] = 0.002547

pcd[50] = 0.002835

pcd[51] = 0.003152

```

---

pcd[52] = 0.003498  
pcd[53] = 0.00387  
pcd[54] = 0.004267  
pcd[55] = 0.004688  
pcd[56] = 0.005136  
pcd[57] = 0.005614  
pcd[58] = 0.006126  
pcd[59] = 0.006676  
pcd[60] = 0.007269  
pcd[61] = 0.007913  
pcd[62] = 0.008616  
pcd[63] = 0.009388  
pcd[64] = 0.010243  
pcd[65] = 0.011191  
pcd[66] = 0.012248  
pcd[67] = 0.01343  
pcd[68] = 0.014756  
pcd[69] = 0.016249  
pcd[70] = 0.017938  
pcd[71] = 0.019854  
pcd[72] = 0.022037  
pcd[73] = 0.024535  
pcd[74] = 0.027401  
pcd[75] = 0.030687  
pcd[76] = 0.034447  
pcd[77] = 0.038738  
pcd[78] = 0.043624  
pcd[79] = 0.049172  
pcd[80] = 0.055451  
pcd[81] = 0.062531  
pcd[82] = 0.070484  
pcd[83] = 0.079374  
pcd[84] = 0.089262  
pcd[85] = 0.100185  
pcd[86] = 0.112164  
pcd[87] = 0.125189

```

pcd[88] = 0.13922
pcd[89] = 0.154175
pcd[90] = 0.169926
pcd[91] = 0.18629
pcd[92] = 0.203031
pcd[93] = 0.219854
pcd[94] = 0.235959
pcd[95] = 0.248497
pcd[96] = 0.253754
pcd[97] = 0.248281
pcd[98] = 0.230005
pcd[99] = 0.199353

```

### ■ Probabilité de survie "ps"

La probabilité que la personne soit vivante à l'âge **borne[i]** est égale au produit des probabilités suivantes

\* (probabilité que la personne soit vivante à l'âge **borne[zero+1]**) = **(1 - pcd[zero])**

\* (probabilité que la personne soit vivante à l'âge **borne[zero+2]** sachant qu'elle était vivante à l'âge **borne[zero+1]**)  
= **(1 - pcd[zero+1])**

\* ...

\* (probabilité que la personne soit vivante à l'âge **borne[i]** sachant qu'elle était vivante à l'âge **borne[i-1]**)  
= **(1 - pcd[i-1])**

$$ps[i] = (1 - pcd[zero]) * (1 - pcd[zero + 1]) * \dots * (1 - pcd[i - 1])$$

Remarque : le nombre de survivants finit par être nul.

```

Clear[ps, i]; ps[zero] = 1;
Do[ps[i] = ps[i - 1] * (1 - pcd[i - 1]), {i, un, ltpd}];
ps[ltpd + 1] = 0;
? ps

```

```
Global`ps
```

```

ps[39] = 1
ps[40] = 0.999254
ps[41] = 0.998183
ps[42] = 0.997025
ps[43] = 0.995767
ps[44] = 0.994394
ps[45] = 0.992888
ps[46] = 0.991228
ps[47] = 0.989392
ps[48] = 0.987357

```

---

ps[49] = 0.985098  
ps[50] = 0.982589  
ps[51] = 0.979803  
ps[52] = 0.976715  
ps[53] = 0.973298  
ps[54] = 0.969531  
ps[55] = 0.965394  
ps[56] = 0.960869  
ps[57] = 0.955934  
ps[58] = 0.950567  
ps[59] = 0.944744  
ps[60] = 0.938437  
ps[61] = 0.931615  
ps[62] = 0.924243  
ps[63] = 0.91628  
ps[64] = 0.907678  
ps[65] = 0.898381  
ps[66] = 0.888327  
ps[67] = 0.877447  
ps[68] = 0.865663  
ps[69] = 0.852889  
ps[70] = 0.83903  
ps[71] = 0.82398  
ps[72] = 0.80762  
ps[73] = 0.789823  
ps[74] = 0.770445  
ps[75] = 0.749334  
ps[76] = 0.726339  
ps[77] = 0.701319  
ps[78] = 0.674151  
ps[79] = 0.644742  
ps[80] = 0.613039  
ps[81] = 0.579045  
ps[82] = 0.542837  
ps[83] = 0.504575  
ps[84] = 0.464525

```
ps[85] = 0.423061
ps[86] = 0.380676
ps[87] = 0.337978
ps[88] = 0.295667
ps[89] = 0.254504
ps[90] = 0.215266
ps[91] = 0.178687
ps[92] = 0.145399
ps[93] = 0.115879
ps[94] = 0.0904023
ps[95] = 0.0690711
ps[96] = 0.0519071
ps[97] = 0.0387355
ps[98] = 0.0291182
ps[99] = 0.0224209
ps[100] = 0.0179512
ps[101] = 0
```

## ■ Probabilité de décès, ou fréquence cumulée des classes

$\text{ffd}[i] = (\text{probabilité que la personne soit décédée à l'âge borne}[i]) = (1 - \text{ps}[i])$

```
Clear[ffd]; Do[ffd[i] = 1 - ps[i], {i, zero, ltpd + 1}]; ? ffd
```

```
Global`ffd
```

```
ffd[39] = 0
ffd[40] = 0.00074625
ffd[41] = 0.00181745
ffd[42] = 0.00297534
ffd[43] = 0.00423259
ffd[44] = 0.00560575
ffd[45] = 0.00711226
ffd[46] = 0.00877237
ffd[47] = 0.0106081
ffd[48] = 0.0126433
ffd[49] = 0.0149024
ffd[50] = 0.0174114
ffd[51] = 0.0201971
```

---

ffd[52] = 0.0232854  
ffd[53] = 0.0267019  
ffd[54] = 0.0304686  
ffd[55] = 0.0346056  
ffd[56] = 0.0391314  
ffd[57] = 0.0440664  
ffd[58] = 0.049433  
ffd[59] = 0.0552562  
ffd[60] = 0.0615633  
ffd[61] = 0.0683848  
ffd[62] = 0.0757566  
ffd[63] = 0.0837199  
ffd[64] = 0.092322  
ffd[65] = 0.101619  
ffd[66] = 0.111673  
ffd[67] = 0.122553  
ffd[68] = 0.134337  
ffd[69] = 0.147111  
ffd[70] = 0.16097  
ffd[71] = 0.17602  
ffd[72] = 0.19238  
ffd[73] = 0.210177  
ffd[74] = 0.229555  
ffd[75] = 0.250666  
ffd[76] = 0.273661  
ffd[77] = 0.298681  
ffd[78] = 0.325849  
ffd[79] = 0.355258  
ffd[80] = 0.386961  
ffd[81] = 0.420955  
ffd[82] = 0.457163  
ffd[83] = 0.495425  
ffd[84] = 0.535475  
ffd[85] = 0.576939  
ffd[86] = 0.619324  
ffd[87] = 0.662022

```

ffd[88] = 0.704333
ffd[89] = 0.745496
ffd[90] = 0.784734
ffd[91] = 0.821313
ffd[92] = 0.854601
ffd[93] = 0.884121
ffd[94] = 0.909598
ffd[95] = 0.930929
ffd[96] = 0.948093
ffd[97] = 0.961265
ffd[98] = 0.970882
ffd[99] = 0.977579
ffd[100] = 0.982049
ffd[101] = 1

```

## ■ Fréquences des classes

**fd[i]** = fréquence de décès de la classe d'âge de **borne[i]** à **borne[i+1]**

Les *Tables de mortalité* donnant des probabilités conditionnelles, on peut représenter la situation par un arbre; chaque **fd[i]** est un produit de probabilités conditionnelles.

```

Clear[fd, i];
Do[fd[i] = ps[i] * pcd[i], {i, zero, ltpd}]

```

Les fréquences des classes sont aussi les différences successives de la fréquence cumulée

$$fd[i] = ffd[i + 1] - ffd[i]$$

ce qui nous permet de calculer la fréquence de la dernière classe

```
fd[ltpd] = ffd[ltpd + 1] - ffd[ltpd]; ? fd
```

```

Global`fd

fd[39] = 0.00074625
fd[40] = 0.0010712
fd[41] = 0.00115789
fd[42] = 0.00125725
fd[43] = 0.00137316
fd[44] = 0.00150651
fd[45] = 0.00166011
fd[46] = 0.00183575
fd[47] = 0.00203518
fd[48] = 0.00225907

```

---

fd[49] = 0.00250904  
fd[50] = 0.00278564  
fd[51] = 0.00308834  
fd[52] = 0.00341655  
fd[53] = 0.00376666  
fd[54] = 0.00413699  
fd[55] = 0.00452577  
fd[56] = 0.00493502  
fd[57] = 0.00536661  
fd[58] = 0.00582317  
fd[59] = 0.00630711  
fd[60] = 0.0068215  
fd[61] = 0.00737187  
fd[62] = 0.00796328  
fd[63] = 0.00860204  
fd[64] = 0.00929735  
fd[65] = 0.0100538  
fd[66] = 0.0108802  
fd[67] = 0.0117841  
fd[68] = 0.0127737  
fd[69] = 0.0138586  
fd[70] = 0.0150505  
fd[71] = 0.0163593  
fd[72] = 0.0177975  
fd[73] = 0.0193783  
fd[74] = 0.021111  
fd[75] = 0.0229948  
fd[76] = 0.0250202  
fd[77] = 0.0271677  
fd[78] = 0.0294092  
fd[79] = 0.0317032  
fd[80] = 0.0339936  
fd[81] = 0.0362083  
fd[82] = 0.0382613  
fd[83] = 0.0400502  
fd[84] = 0.0414645

```

fd[85] = 0.0423843
fd[86] = 0.0426982
fd[87] = 0.0423112
fd[88] = 0.0411628
fd[89] = 0.0392382
fd[90] = 0.0365793
fd[91] = 0.0332876
fd[92] = 0.0295206
fd[93] = 0.0254764
fd[94] = 0.0213312
fd[95] = 0.017164
fd[96] = 0.0131716
fd[97] = 0.00961728
fd[98] = 0.00669733
fd[99] = 0.00446967
fd[100] = 0.0179512

```

La somme des fréquences des classes est égale à 1:

```

acc = 0; Do[acc = acc + fd[i], {i, zero, ltpd}]; acc
1.

```

## ■ Les quantiles

Des valeurs numériques de la fonction de distribution ont été calculées: **borne[i]** |--> **ffd[i]**

Les quantiles sont calculés sur la fonction réciproque: **ffd[i]** |--> **borne[i]**

Pour les valeurs intermédiaires, on effectue une interpolation linéaire.

A titre d'exemple, les quintiles sont calculés.

```

interpol[x0_, y0_, x1_, y1_, x_] := Module[{m = (y1 - y0) / (x1 - x0)}, y0 + m * (x - x0)]

Clear[qq]; qq[x_] := Module[{ind = zero}, While[ffd[ind] <= x, ind++];
  If[ind == zero, 0,
    interpol[ffd[ind - 1], borne[ind - 1], ffd[ind], borne[ind], x]]]

Table[qq[t], {t, 1/5, 4/5, 1/5}]
{72.4282, 80.3836, 85.5441, 90.4173}

```

## ■ L'histogramme

**fd[i]** = (probabilité de décès entre les âges **borne[i]** et **borne[i+1]**) est représenté par l'**aire** du rectangle.

**h[i]** = (probabilité **annuelle** de décès entre les âges **borne[i]** et **borne[i+1]**)

= (**densité** de décès entre les âges **borne[i]** et **borne[i+1]**) est représenté par la **hauteur** du rectangle.

```
Clear[h, i]; Do[h[i] = fd[i] / (borne[i + 1] - borne[i]), {i, zero, ltpd}]; ?h
```

```
Global`h
```

```
h[39] = 0.000995
h[40] = 0.0010712
h[41] = 0.00115789
h[42] = 0.00125725
h[43] = 0.00137316
h[44] = 0.00150651
h[45] = 0.00166011
h[46] = 0.00183575
h[47] = 0.00203518
h[48] = 0.00225907
h[49] = 0.00250904
h[50] = 0.00278564
h[51] = 0.00308834
h[52] = 0.00341655
h[53] = 0.00376666
h[54] = 0.00413699
h[55] = 0.00452577
h[56] = 0.00493502
h[57] = 0.00536661
h[58] = 0.00582317
h[59] = 0.00630711
h[60] = 0.0068215
h[61] = 0.00737187
h[62] = 0.00796328
h[63] = 0.00860204
h[64] = 0.00929735
h[65] = 0.0100538
h[66] = 0.0108802
h[67] = 0.0117841
h[68] = 0.0127737
h[69] = 0.0138586
h[70] = 0.0150505
h[71] = 0.0163593
```

h[72] = 0.0177975  
 h[73] = 0.0193783  
 h[74] = 0.0211111  
 h[75] = 0.0229948  
 h[76] = 0.0250202  
 h[77] = 0.0271677  
 h[78] = 0.0294092  
 h[79] = 0.0317032  
 h[80] = 0.0339936  
 h[81] = 0.0362083  
 h[82] = 0.0382613  
 h[83] = 0.0400502  
 h[84] = 0.0414645  
 h[85] = 0.0423843  
 h[86] = 0.0426982  
 h[87] = 0.0423112  
 h[88] = 0.0411628  
 h[89] = 0.0392382  
 h[90] = 0.0365793  
 h[91] = 0.0332876  
 h[92] = 0.0295206  
 h[93] = 0.0254764  
 h[94] = 0.0213312  
 h[95] = 0.017164  
 h[96] = 0.0131716  
 h[97] = 0.00961728  
 h[98] = 0.00669733  
 h[99] = 0.00446967  
 h[100] = 0.00359024

## ■ Espérance de vie

Pour l'âge donné, l'âge moyen du décès est

$$\sum_{j=\text{zero}}^{\text{ltpd}} c[j] * \text{fd}[j]$$

où **c[j]** désigne le centre de la classe d'âge de **borne[j]** à **borne[j+1]**.

En soustrayant l'âge initial, on obtient l'espérance de vie

```
Clear[esp]; esp = -age +  $\sum_{j=\text{zero}}^{\text{ltpd}} \left( \frac{\text{borne}[j] + \text{borne}[j + 1]}{2} * \text{fd}[j] \right)$ 
```

41.7745