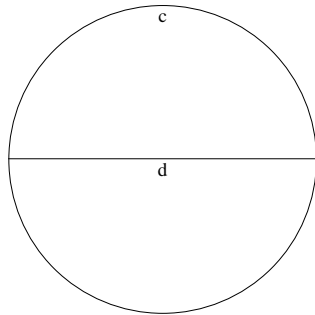


# 1. Définitions du nombre $\pi$

## ■ Première définition de $\pi$

$\pi$  est le rapport de la circonférence au diamètre:

$$c = 2 \pi_1 r$$
$$r = \pi_1 \frac{d}{2}$$

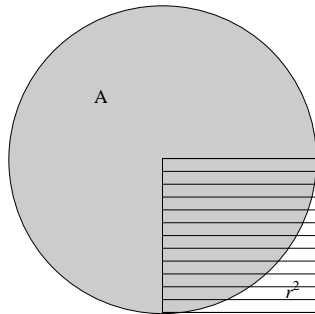


$$\pi_1 = \frac{c}{d} = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

## ■ Deuxième définition de $\pi$

$\pi$  est le rapport de l'aire du disque à l'aire du carré dont le coté est le rayon:

$$A = \pi_2 r^2$$



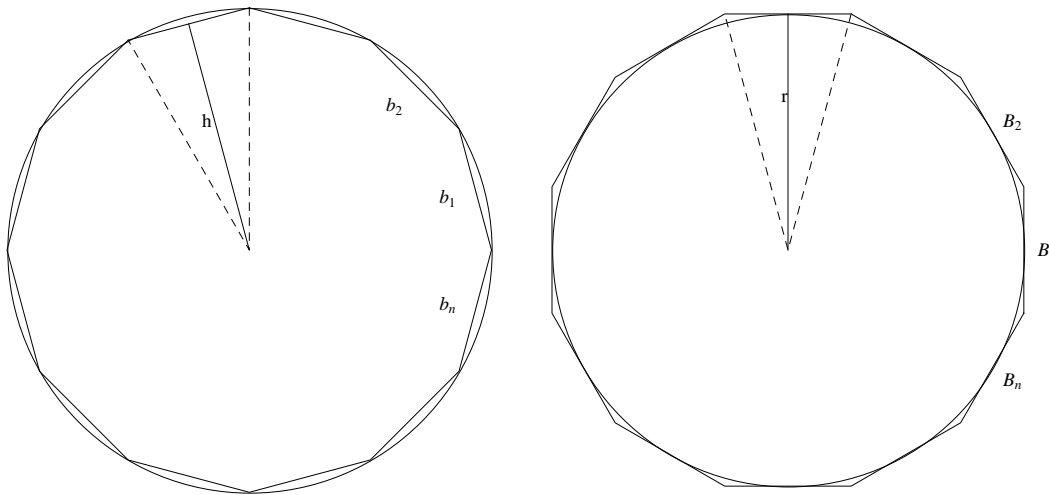
$$\pi_2 = \frac{A}{r^2} = \frac{\text{aire du disque de rayon } r}{\text{aire du carré de côté } r}$$

### ■ Equivalence des deux définitions de $\pi$

Proposition:

$$\pi_1 = \pi_2$$

Démonstration: comparons les aires  
 du disque,  
 du polygone régulier à  $n$  côtés inscrit et  
 du polygone régulier à  $n$  côtés circonscrit :



$$\frac{1}{2} h b_1 + \dots + \frac{1}{2} h b_n \leq A \leq \frac{1}{2} B_1 r + \dots + \frac{1}{2} B_n r$$

$$\frac{1}{2} h (b_1 + \dots + b_n) \leq \pi_2 r^2 \leq \frac{1}{2} r (B_1 + \dots + B_n)$$

Pour  $n$  tendant vers l'infini, les périmètres inscrit et circonscrit tendent vers la circonférence du cercle et  $h$  tend vers  $r$ :

$$\frac{1}{2} r (2 \pi_1 r) \leq \pi_2 r^2 \leq \frac{1}{2} r (2 \pi_1 r)$$

$$\pi_1 \leq \pi_2 \leq \pi_1$$

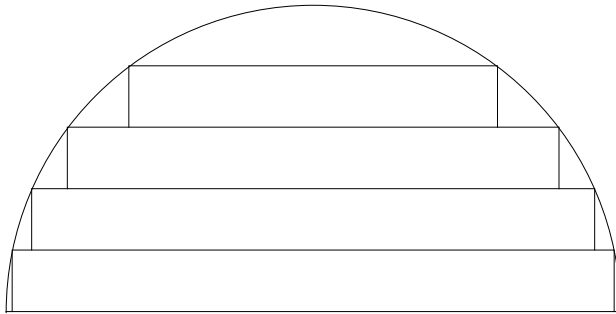
### ■ Troisième définition de $\pi$

Le volume d'une boule est

$$V = \frac{4}{3} \pi_3 r^3$$

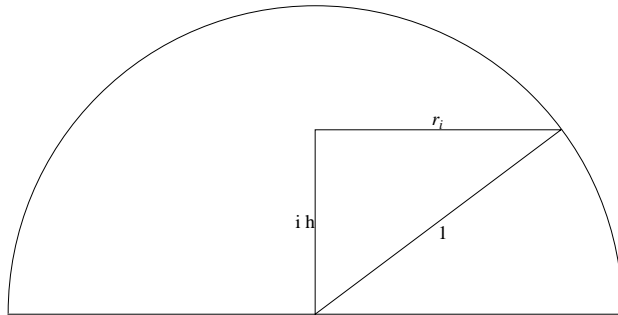
De ce point de vue, le volume d'une boule de rayon 1 est  $V_1 = \frac{4}{3} \pi_3$ . Considérons une demi-boule de rayon 1 et déterminons une approximation par défaut au moyen d'un empilement de  $n$  disques de même épaisseur  $h = \frac{1}{n}$

Coupe pour  $n = 5$



Le rayon du  $i$ -ème cylindre vérifie  $r_i^2 + (ih)^2 = 1^2$  d'où  $r_i = \sqrt{1 - (ih)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$

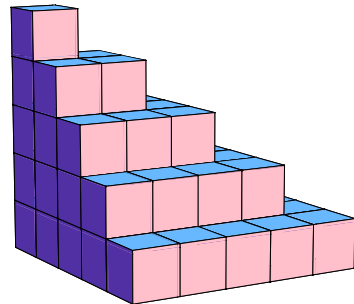
Rayon du i-ème cylindre. Fig. pour  $i = 3$

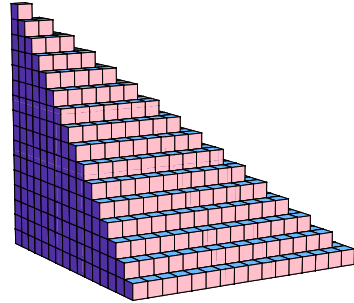


Le volume de l'empilement de cylindres est donc

$$\begin{aligned} \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h + \pi r_3^2 h + \dots + \pi r_n^2 h &= \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2) = \\ \pi \frac{1}{n} \left( 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + 1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) &= \\ = \pi - \pi \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

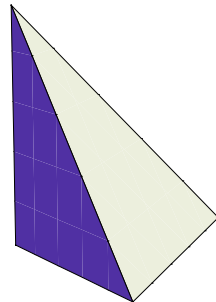
Dans cette expression, la valeur de  $\pi$  est celle qui apparaît dans l'aire du disque. La dernière accolade représente un volume que nous représentons graphiquement comme suit:





Pour  $n$  tendant vers l'infini, ce volume tend vers une pyramide dont la base est un carré de côté 1 et la hauteur est de 1; son volume est donc  $\frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}$ . Le volume de l'empilement de cylindres tend donc vers

$$\pi \cdot \pi \left\{ \left( \frac{1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} + \left( \frac{2}{n} \right)^2 \frac{1}{n} + \left( \frac{3}{n} \right)^2 \frac{1}{n} + \dots + \left( \frac{n}{n} \right)^2 \frac{1}{n} \right\} \rightarrow \pi \cdot \pi \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



qui représente le volume de la demi-boule. Le volume de la boule de rayon 1 est

$$V_1 = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Il s'ensuit que  $\pi_3 = \pi$ .

#### ■ Quatrième définition de $\pi$

L'aire d'une sphère est

$$A = 4\pi_4 r^2$$

De ce point de vue, l'aire d'une boule de rayon 1 est  $A = 4\pi_4$ .

Sans démonstration:  $\pi_4 = \pi$ .

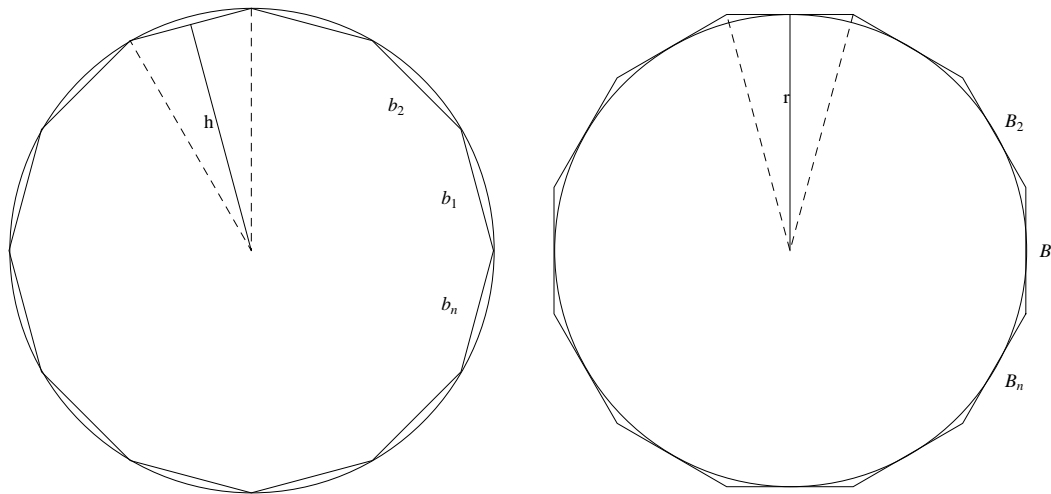
## 2. Calcul numérique du nombre $\pi$

### ■ Chez les Egyptiens

Vers 2700 ans avant J.-C. , les Egyptiens, selon qu'ils calculaient des longueurs ou des aires, utilisaient deux valeurs distinctes de  $\pi$ . La circonférence d'un cercle était déterminée de la manière suivante:  $C = 3d$  ce qui correspond à  $\pi = 3$ . Mais, pour calculer l'aire d'un disque, ils procédaient comme suit:  $A = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$  ce qui correspond à  $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.1605$ .

### ■ Chez les Grecs

Calcul numérique de  $\pi$  avec la méthode d'Archimède:



Périmètres des polygones inscrit et circonscrit à 12 côtés

$$\begin{aligned}
24 r \operatorname{Sin}\left[\frac{2 \pi}{24}\right] &\leq 2 \pi r \leq 24 r \operatorname{Tan}\left[\frac{2 \pi}{24}\right] \\
6 \sqrt{2} (-1 + \sqrt{3}) r &\leq 2 \pi r \leq 24 (2 - \sqrt{3}) r \\
3 \sqrt{2} (-1 + \sqrt{3}) &\leq \pi \leq 12 (2 - \sqrt{3}) \\
\pi &= \frac{3 \sqrt{2} (-1 + \sqrt{3}) + 12 (2 - \sqrt{3})}{2} \approx 3.16061 \\
\Delta\pi &= \frac{12 (2 - \sqrt{3}) - 3 \sqrt{2} (-1 + \sqrt{3})}{2} \approx 0.0547809 \\
\pi &= 3.16 \pm 0.06
\end{aligned}$$

### ■ Calcul numérique de $\pi$ à 100 chiffres (vers 1700)

On met au point une méthode de calcul efficace mais malheureusement trop longue à expliquer ici (ce développement pourrait faire l'objet d'un travail de maturité).

Grégory, 1671

La réciproque de la fonction tangente est exprimée au moyen d'une série

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \dots$$

Machin, 1706

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Calcul numérique des 100 premiers chiffres (il suffit de prendre les 70 premiers termes de la série):

$$\begin{aligned}
&x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{19}}{19} + \frac{x^{21}}{21} - \frac{x^{23}}{23} + \frac{x^{25}}{25} - \frac{x^{27}}{27} + \frac{x^{29}}{29} - \frac{x^{31}}{31} + \frac{x^{33}}{33} - \frac{x^{35}}{35} + \frac{x^{37}}{37} - \frac{x^{39}}{39} + \frac{x^{41}}{41} - \frac{x^{43}}{43} + \frac{x^{45}}{45} - \frac{x^{47}}{47} + \frac{x^{49}}{49} - \\
&\frac{x^{51}}{51} + \frac{x^{53}}{53} - \frac{x^{55}}{55} + \frac{x^{57}}{57} - \frac{x^{59}}{59} + \frac{x^{61}}{61} - \frac{x^{63}}{63} + \frac{x^{65}}{65} - \frac{x^{67}}{67} + \frac{x^{69}}{69} - \frac{x^{71}}{71} + \frac{x^{73}}{73} - \frac{x^{75}}{75} + \frac{x^{77}}{77} - \frac{x^{79}}{79} + \frac{x^{81}}{81} - \frac{x^{83}}{83} + \frac{x^{85}}{85} - \frac{x^{87}}{87} + \frac{x^{89}}{89} - \frac{x^{91}}{91} + \frac{x^{93}}{93} - \frac{x^{95}}{95} + \frac{x^{97}}{97} - \\
&\frac{x^{99}}{99} + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{103}}{103} + \frac{x^{105}}{105} - \frac{x^{107}}{107} + \frac{x^{109}}{109} - \frac{x^{111}}{111} + \frac{x^{113}}{113} - \frac{x^{115}}{115} + \frac{x^{117}}{117} - \frac{x^{119}}{119} + \frac{x^{121}}{121} - \frac{x^{123}}{123} + \frac{x^{125}}{125} - \frac{x^{127}}{127} + \frac{x^{129}}{129} - \frac{x^{131}}{131} + \frac{x^{133}}{133} - \frac{x^{135}}{135} + \frac{x^{137}}{137} - \frac{x^{139}}{139} -
\end{aligned}$$

On obtient l'approximation de  $\pi$  suivante:

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170676778279277

L'erreur est

$$-3.043201588 \times 10^{-100}$$

## ■ Aujourd'hui

Avec des méthodes plus performantes encore et des ordinateurs, on peut calculer des millions de décimales de  $\pi$ .

La formule suivante, découverte en 1997 par *David Bailey, Peter Borwein* et *Simon Plouffe*

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \left( \frac{1}{16} \right)^n$$

Le principe du calcul est le suivant: le nombre  $\pi$  est approché par une suite de nombres rationnels.

La somme des 18 premiers termes suffit pour déterminer les 25 premiers chiffres caractéristiques du nombre  $\pi$

$$c[k_] := \frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6};$$

$$\text{TableForm}\left[\text{Table}\left[\left\{n, c[n], \frac{c[n]}{16^n}, \sum_{k=0}^n \frac{c[k]}{16^k}, N\left[\sum_{k=0}^n \frac{c[k]}{16^k}, 25\right]\right\}, \{n, 0, 17\}\right],$$

TableHeadings  $\rightarrow$  {None, {"n", "Coefficient", "Terme", "Somme partielle (approximation rationnelle)", "Valeur numérique approchée"}}

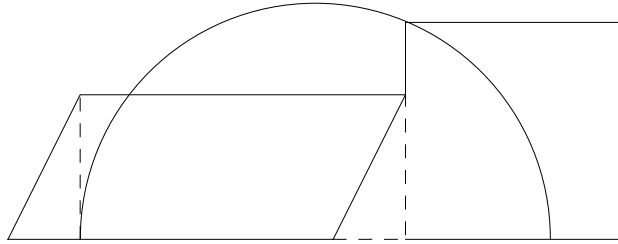
n	Coefficient	Terme	Somme partielle (approximation rationnelle)	Valeur numérique approchée
0	$\frac{47}{15}$	$\frac{47}{15}$	$\frac{47}{15}$	3.13333333333333333333333333333333
1	$\frac{106}{819}$	$\frac{53}{6552}$	$\frac{102913}{32760}$	3.141422466422466422466422
2	$\frac{829}{19635}$	$\frac{829}{5026560}$	$\frac{615863723}{196035840}$	3.141587390346581523052111
3	$\frac{316}{15225}$	$\frac{79}{15590400}$	$\frac{357201535487}{113700787200}$	3.141592457567435381837005
4	$\frac{857}{69597}$	$\frac{857}{4561108992}$	$\frac{16071212445820879}{5115625817702400}$	3.141592645460336319557021
5	$\frac{3802}{466785}$	$\frac{1901}{244729774080}$	$\frac{40413742330349316707}{12864093722915635200}$	3.141592653228087534734378
6	$\frac{5273}{911547}$	$\frac{5273}{15293220913152}$	$\frac{4318127540987083098959311}{1374502686106089789849600}$	3.141592653572880827785241
7	$\frac{776}{179645}$	$\frac{97}{6027885936640}$	$\frac{16331158360096799798177512637}{5198369158853231585211187200}$	3.141592653588972704940778
8	$\frac{1787}{533715}$	$\frac{1787}{2292288470384640}$	$\frac{2090388270092909093421859664191}{665391252333213642907031961600}$	3.141592653589752275236178
9	$\frac{11126}{4165161}$	$\frac{5563}{143113842220597248}$	$\frac{64251934196540737654784844866951}{20452025861189303550405613977600}$	3.141592653589791146388777
10	$\frac{4519}{2072385}$	$\frac{4519}{2278611404728565760}$	$\frac{265231984363320332474665054275863923}{84425962754989445056074374499532800}$	3.141592653589793129614171
11	$\frac{16228}{8947437}$	$\frac{4057}{39351244081172840448}$	$\frac{4437861562367075948602657783785247810411}{1412615208816483394678236434126182809600}$	3.141592653589793232711292
12	$\frac{19139}{12491175}$	$\frac{19139}{3515953192213728460800}$	$\frac{2782574702496655561202854740689196451804989707}{885721036849605620330411670088589631081676800}$	3.141592653589793238154766
13	$\frac{1486}{1133055}$	$\frac{743}{2551413037895138672640}$	$\frac{2426405140577083649593805922597689130605532212899}{772348744132856100928118976317250158303222169600}$	3.141592653589793238445978
14	$\frac{25681}{22621131}$	$\frac{25681}{1630024274276786808815616}$	$\frac{517658978311277334141536972885988480280412713877204531}{164775970468280051996408614883427417773042630551142400}$	3.141592653589793238461732
15	$\frac{29312}{29539125}$	$\frac{229}{266064784685701005312000}$	$\frac{28471243807120253377792333689239912281715167328354127149}{9062678375755402859802473818588507977517344680312832000}$	3.141592653589793238462593
16	$\frac{3687}{4214903}$	$\frac{3687}{77751236936510610234933248}$	$\frac{9278436701814805132782128093787327904238201772972845154896687}{2953418130518176727175308587792171687777172423177788194816000}$	3.141592653589793238462641
17	$\frac{37294}{48002745}$	$\frac{18647}{7083954814804326482297487360}$	$\frac{722010830388420876212574684706667202761999027022892733523938606167}{229823185244402440201873813067635632056068449282002766167801856000}$	3.141592653589793238462643

Voir aussi Calcul numérique du nombre  $\pi$  à plus de 120 décimales: <http://www.deleze.name/marcel/culture/pi/decimales/index.html>

### 3. Transcendance du nombre $\pi$

#### ■ Les problèmes de quadrature

Considérons par exemple le problème de la quadrature du parallélogramme:  
un parallélogramme étant donné, construire - avec la règle et le compas - un carré de même aire.



- 1° le parallélogramme est transformé en un rectangle de dimensions  $p, q$ ;
- 2° au moyen du théorème de la hauteur, on construit  $h$  tel que  $h^2 = p q$ ;
- 3° le carré de côté  $h$  est solution.

### ■ La quadrature du cercle

Un disque étant donné, construire - avec la règle et le compas - un carré de même aire.

Pendant des siècles, de nombreux mathématiciens ont effectué de nombreuses recherches sur ce problème, sans succès.

En 1882, l'allemand Ferdinand Lindemann démontra que  $\pi$  est un nombre transcendant (c'est-à-dire qu'il ne vérifie aucune équation à coefficients entiers). Une conséquence de ce théorème d'algèbre est que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Une autre conséquence est que  $\pi$  est un nombre irrationnel (en particulier  $\pi \neq 3.1416$  et  $\pi \neq \frac{22}{7}$ ).

### ■ Lien hypertexte vers la page mère: Les mathématiques dans la culture générale

<http://www.deleze.name/marcel/culture/>