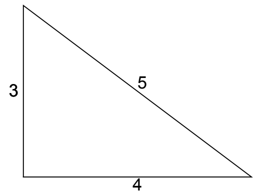
Démonstration de « $\sqrt{2}$ est irrationnel »

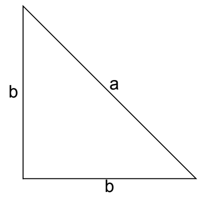
Un exemple de démonstration par l'absurde

Introduction

On peut construire un triangle rectangle dont les trois côtés ont pour mesure des nombres entiers :



Est-il possible de construire un carré dont le côté b et la diagonale a soient tous deux mesurés par des nombres entiers ? (La figure ci-dessous représente la moitié du carré qui est un triangle rectangle isocèle).



D'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} b^2 + b^2 &= a^2 \\ 2b^2 &= a^2 \\ 2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ \frac{a}{b} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

S'il est possible de trouver des entiers a, b qui vérifient cette égalité, on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, sinon on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Lemme

« Pour tout nombre entier a, si a^2 est pair, alors a est pair. »

Démonstration par contraposition : Montrons que, si a est impair, alors a^2 est impair. Posons $a = 2n + 1$. Alors $a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ qui est impair.

Démonstration de « $\sqrt{2}$ est irrationnel »

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel : alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où a, b sont des nombres entiers positifs. Il est possible de simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ jusqu'à ce que a, b soient premiers entre eux (c'est-à-dire la fraction $\frac{a}{b}$ ne puisse plus être simplifiée).

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ \sqrt{2}b &= a \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Puisque a^2 est pair, a est pair et $a = 2p$ où p est un entier positif.

$$\begin{aligned} 2b^2 &= (2p)^2 \\ 2b^2 &= 4p^2 \\ b^2 &= 2p^2 \end{aligned}$$

Puisque b^2 est pair, b est pair. Par conséquent, il est possible de simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2, ce qui contredit l'hypothèse que a, b sont premiers entre eux.

Puisque l'hypothèse « $\sqrt{2}$ est rationnel » conduit à une contradiction, c'est le contraire qui est vrai, à savoir « $\sqrt{2}$ est irrationnel ».

Marcel Délèze

Généralisation : Démonstration de «$\sqrt{n}$ est irrationnel si n n'est pas un carré» par contraposition

www.deleze.name/marcel/culture/Racine_de_2_est_irrationnel/irrationnel-generalisation.pdf

Prolongement : Le développement décimal de tout nombre irrationnel est illimité et non périodique

www.deleze.name/marcel/culture/DeveloppementDecimal/DeveloppementDecimal.pdf

Lien vers la page mère : Mathématiques dans la culture générale

www.deleze.name/marcel/culture/index.html