Masse volumique de l'air, température virtuelle et humidité spécifique, en fonction de la pression, la température et l'humidité relative

Marcel Délèze

1 Masse volumique d'un gaz parfait

Selon la loi des gaz parfaits

$$V = \frac{nRT}{p}$$

On en déduit sa masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT} = \frac{m}{n}\frac{p}{RT}$$

Pour appliquer cette formule à l'atmosphère, faisons apparaître la masse molaire de l'air

$$M_{air} = \frac{m}{n}$$

puis la constante spécifique de l'air sec :

$$R_s = \frac{R}{M_{air}} = \frac{8.3144621 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0.0289644 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} = 287.058 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{ K}^{-1}$$

On obtient

$$\rho = \frac{1}{R_s}\frac{p_{atm}}{T} \tag{1}$$

2 Constante spécifique d'un mélange de deux gaz

Deux gaz confinés dans un volume commun V obéissent chacun à la loi des gaz parfaits

$$\frac{1}{p_1 V} = \frac{1}{n_1 RT} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p_2 V} = \frac{1}{n_2 RT}$$

En faisant apparaître les masses molaires $M = \frac{m}{n}$

$$\frac{m_1}{p_1 V} = \frac{m_1}{n_1}\frac{1}{RT} \qquad \text{et} \qquad \frac{m_2}{p_2 V} = \frac{m_2}{n_2}\frac{1}{RT}$$

$$\frac{m_1}{p_1 V} = \frac{M_1}{RT} \qquad \text{et} \qquad \frac{m_2}{p_2 V} = \frac{M_2}{RT}$$

En faisant apparaître les constantes spécifiques $R_s = \frac{R}{M}$

$$\frac{m_1}{p_1 V} = \frac{1}{R_1 T} \qquad \text{et} \qquad \frac{m_2}{p_2 V} = \frac{1}{R_2 T}$$

On a donc

$$\frac{1}{R_1} = \frac{m_1 T}{p_1 V} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{m_2 T}{p_2 V}$$

Calculons maintenant la constante spécifique $\overline{R}$ du mélange des deux gaz, avec $m = m_1 + m_2$ et $p = p_1 + p_2$

$$\frac{1}{\overline{R}} = \frac{mT}{pV} = \frac{1}{p}\left(\frac{m_1 T}{V} + \frac{m_2 T}{V}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{p_1}{R_1} + \frac{p_2}{R_2}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{p - p_2}{R_1} + \frac{p_2}{R_2}\right)$$

$$= \frac{1}{pR_1}\left(p - p_2 + \frac{p_2 R_1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1}\left(1 - \frac{p_2}{p} + \frac{p_2 R_1}{pR_2}\right) = \frac{1}{R_1}\left(1 - \frac{p_2}{p}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\right)$$

Nous appliquons cette formule à un mélange d'air sec et de vapeur d'eau: $R_1 = R_s$ = constante spécifique de l'air sec, $p = p_{atm}$ = pression atmosphérique, $p_2 = H_r p_{sat}(t)$ = pression partielle de la vapeur d'eau et $R_2 = R_v$ = constante spécifique de la vapeur d'eau:

$$\frac{1}{\overline{R}} = \frac{1}{R_s}\left(1 - \frac{p_2}{p_{atm}}\left(1 - \frac{R_s}{R_v}\right)\right) \tag{2}$$

3 Constante spécifique de l'air humide

La constante spécifique de la vapeur d'eau est

$$R_v = \frac{R}{M_{eau}} = \frac{8.3144621 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0.01801 \;\; \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}} = 461.7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

La masse volumique de la vapeur d'eau est

$$\rho_v = \frac{H_r p_{sat}(t)}{R_v T}$$

La constante spécifique de l'air dont l'humidité relative est H_r est donnée par

$$\frac{1}{\overline{R}} = \frac{1}{R_s}\left(1 - \frac{H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}}\left(1 - \frac{R_s}{R_v}\right)\right)$$

où

$$1 - \frac{R_s}{R_v} = 1 - \frac{287.058 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{461.7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \;\text{K}^{-1}} = 0.3783$$

Wikipedia, Masse volumique de l'air humide

En remplaçant, dans la formule (1), la constante spécifique de l'air sec par celle de l'air humide, on obtient

$$\rho = \frac{1}{\overline{R}}\frac{p_{atm}}{T} = \frac{\left(1 - \frac{0.3783 H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}}\right) p_{atm}}{R_s T} \tag{3}$$

Cette formule exprime la masse volumique de l'air en fonction de la pression atmosphérique p_{atm}, la température $T = t + 273.15$ K et l'humidité relative H_r .

4 Température virtuelle

On appelle température virtuelle T_v la température de l'air sec à laquelle l'air sec et l'air humide de température T auraient la même pression et la même masse volumique:

$$\rho = \frac{1}{R_s}\frac{p_{atm}}{T_v} = \frac{\left(1 - \frac{0.3783 H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}}\right) p_{atm}}{R_s T}$$

$$\frac{1}{T_v} = \left(1 - \frac{0.3783 H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}}\right)\frac{1}{T}$$

$$T_v = \frac{T}{1 - \frac{0.3783 H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}}} \tag{4}$$

Sachant que Δx est petit, on peut utiliser l'approximation linéaire

$$\frac{1}{1-\Delta x} \approx 1 + \Delta x, \qquad \frac{T}{1-\Delta x} \approx T + T\Delta x$$

on obtient

$$T_v \approx T + \frac{0.3783 H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}} T$$

$$\Delta T = T_v - T \approx \frac{0.3783 H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}} T$$

Wikipedia,Température virtuelle

5 Humidité spécifique (ou teneur en eau)

Par définition, l'humidité spécifique (ou teneur en eau) H_s (ou q) est le rapport entre la masse volumique de la vapeur d'eau et la masse volumique de l'air humide

$$H_s = \frac{\rho_v}{\rho}$$

Exprimons l'humidité spécifique en fonction de la pression, la température et l'humidité relative

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{\frac{H_r p_{sat}(t)}{R_v T}}{\frac{\left(1 - \frac{0.3783 H_r p_{sat}(t)}{p_{atm}}\right) p_{atm}}{R_s T}} \\ &= \frac{R_s}{R_v} \frac{H_r p_{sat}(t)}{p_{atm} - 0.3783 H_r p_{sat}(t)} \end{aligned}$$

$$H_s = 0.6217 \, \frac{H_r p_{sat}(t)}{p_{atm} - 0.3783 \, H_r p_{sat}(t)} \tag{5}$$

L'humidité spécifique à saturation correspond au cas $H_r = 1$

$$H_{s,sat} = 0.6217 \, \frac{p_{sat}(t)}{p_{atm} - 0.3783 \, p_{sat}(t)}$$

Wikipedia, Humidité spécifique

Lien vers la page mère:
Calculateurs de l'humidité de l'air
www.deleze.name/marcel/physique/rosee/index.html